Seminar zur ganzzahligen Optimierung
Thema: Durchschnitt von Matroiden - Satz von Edmonds
von Dany Sattler

1 Matroide

1.1 Definitionen und Beispiele

1. **Definition** (Unabhängigkeitssystem):
   Ein Mengensystem $(S, \mathcal{J})$ nennt man *Unabhängigkeitssystem*, falls:
   - (M1) $\emptyset \in \mathcal{J}$
   - (M2) $I_1 \subseteq I_2, I_2 \in \mathcal{J} \Rightarrow I_1 \in \mathcal{J}$

   Die Elemente von $\mathcal{J}$ werden unabhängig genannt, die Elemente von $2^S \backslash \mathcal{J}$ abhängig.
   Minimale abhängige Mengen heißen *Kreise*, maximale unabhängige Mengen heißen *Basen*.

2. **Definition** (Matroid):
   Ein Unabhängigkeitssystem $(S, \mathcal{J})$ heißt *Matroid*, falls:
   - (M3) $I_1, I_2 \in \mathcal{J}$ und $|I_1| > |I_2|$ dann gibt es ein $x \in I_1 \backslash I_2$ mit $I_2 \cup \{x\} \in \mathcal{J}$

3. **Definition** (Rang eines Matroiden):
   Sei $(S, \mathcal{J})$ ein Matroid. Dann ist für $U \subseteq S$ der Rang von U definiert durch:
   $r(U) := max\{|I| : I \subseteq U, I \in \mathcal{J}\}$

4. **Beispiel** (Matrixmatroid):
   Sei A eine Matrix mit
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Die Spalten der Matrix A, also $\{(1), ..., (7)\}$, bilden die Menge S.
   Diejenigen Spalten von A, die zusammen linear unabhängig sind, bilden das System aus Teilmengen $\mathcal{J}$ von S.
   Dann enthält $\mathcal{J}$ alle diejenigen Teilmengen von S $\backslash\{(7)\}$ mit höchstens 3 Elementen außer:
   $$\{(1), (2), (4)\}, \{(2), (3), (5)\}, \{(2), (3), (6)\}$$
   und außer allen Teilmengen, die $\{(5), (6)\}$ gemeinsam enthalten.
   $\Rightarrow$ S stellt somit die Grundmenge des Matroiden dar und $\mathcal{J}$ das Unabhängigkeitssystem
   $\Rightarrow$ das Paar $(S, \mathcal{J})$ ist ein Matroid.

5. **Beispiel**: (Graphenmatroid)
Wir haben den Graphen $G = (V, E)$ mit 4 Ecken $\{a, b, c, d\}$ und mit 7 Kanten $\{1, ..., 7\}$
Sei S die Menge der Kanten, also S = E, und $\mathcal{J}$ sei das System der Teilmengen von S, die *kreisfrei* sind. Die Kreise von G haben die Kantenmenge :

$$\{(7), (5, 6), (1, 2, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (1, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6)\}$$

$\Rightarrow (S, \mathcal{J})$ ist somit ein Matroid, genauer einGraphen-Matroid, der mit $M(G)$ bezeichnet wird.
Dieser Matroid kann auch in eine Matrix umgeformt werden über Ecken-Kanten-Indizes. Dabei: Falls eine Verbindung besteht: = 1; sonst = 0;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei hier gilt: Spalte i = Kante i mit i = 1,...,7 und Zeile j = Ecke j mit j = a,b,c,d

6. **Definition** (Bipartiter Graph):
ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, falls sich seine Knoten V in zwei disjunkte Teilmengen V_1, V_2 aufteilen lassen, s.d. zwischen den Knoten innerhalb beider Teilmengen keine Kanten verlaufen.

7. **Definition** (Matching):
Ein *Matching* ist eine Teilmenge der Kanten eines Graphen G, in der keine zwei Kanten einen gemeinsamen Knoten besitzen.

8. **Definition**
$\mathcal{M}$ stellt die Menge aller Matchings in einem bipartiten Graphen
$G = \{(V_1 \dot{\cup} V_2), E = (V_1 \times V_2)\}$.
$\mathcal{M} \subseteq 2^E$

9. **Proposition**
$(E, \mathcal{M})$ ist *kein* Matroid

10. **Beobachtung**
Sei $(E, \mathcal{M}) = (E, \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2)$ mit $(E, \mathcal{J}_1), (E, \mathcal{J}_2)$ Matroide, mit

$$\mathcal{J}_1 := \{F \subseteq E : (v_1, w_1) \in F, (v_2, w_2) \in F \Rightarrow v_1 \neq v_2\}$$

$$\mathcal{J}_2 := \{F \subseteq E : (v_1, w_1) \in F, (v_2, w_2) \in F \Rightarrow w_1 \neq w_2\}$$

Dann ist $\mathcal{J}_1$ ein Matroid. Analog für $\mathcal{J}_2$

1.2 Alternative Charakterisierung eines Matroides und wichtige Begriffe

a) **Kreis**
Sei $(S, \mathcal{J})$ ein Matroid und $\mathcal{C}$ ein System von Teilmengen. Dann heißt $\mathcal{C}$ *Menge der Kreise* von $(S, \mathcal{J})$, wenn gilt:
- $(C1)$ Die leere Menge liegt nicht in $\mathcal{C}$: $\emptyset \notin \mathcal{C}$
- $(C2)$ Kein Element von $\mathcal{C}$ ist eine echte Teilmenge eines weiteren Elements von $\mathcal{C}$
- $(C3)$ C_1, C_2 sind zwei Elemente von $\mathcal{C}$ und $e \in C_1 \cap C_2$, dann enthält $(C_1 \cup C_2) \backslash \{e\}$ ein Element von $\mathcal{C}$.

Wenn $\mathcal{C}$ denn drei Axiomen genügt, ist $(S, \mathcal{J})$ ein Matroid, falls $\mathcal{J}$ aus denjenigen Teilmengen von S besteht, die kein Element von $\mathcal{C}$ enthalten.

b) **Basis**
Sei $\mathcal{B}$ ein System von Teilmengen einer endlichen Menge S.
Dann ist $\mathcal{B}$ die *Menge der Basen* des Matroiden $(S, \mathcal{J}) \Leftrightarrow \mathcal{B}$ erfüllt folgende Bedingungen:
- $(B1)$: $\mathcal{B}$ ist nicht leer, also $B \neq \emptyset$
- $(B2)$: $(B_1, B_2) \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \backslash B_2$, dann $\exists y \in B_2 \backslash B_1$ s.d. $(B_1 \backslash \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$

Das Axiom $(B2)$ ist der sog. *Austauschsatz von Steinitz* aus der linearen Algebra.

c) **Rang**
Sei S eine endliche Menge und r definiert durch $r : 2^S \to \mathbb{Z}_+$
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
   i. r ist die *Rangfunktion* des Matroiden $(S, \mathcal{J})$ und $\mathcal{J} = \{I \subseteq S : r(I) = |I|\}$
   ii. $\forall X, Y \subseteq S$ gilt:
      - $(R1) : r(X) \leq |X|$
      - $(R2)$: Falls $X \subseteq Y$ dann ist $r(X) \leq r(Y)$
      - $(R3) : r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

2 Greedy-Algorithmus

2.1 Optimierungsproblem: maximale unabhängige Menge

Sei $\mathcal{J}$ ein Unabhängigkeitssystem über der Grundmenge S und $c : S \to \mathbb{R}_+$, eine positive Gewichtsfunktion auf den Elementen von S.
Gesucht: Ein maximales Element $I \in \mathcal{J}$, dessen Gesamtgewicht

$$c(I) = \sum_{s \in I} c(s)$$

maximal ist.

Das Problem ist die kompakte Darstellung von J, das wir mittels eines Orakels lösen wollen.
Ein Orakel, in diesem Fall ein Unabhängigkeitsorakel, ist ein Algorithmus, der mit dem Input einer Menge $\mathcal{J} \subseteq S$ entscheidet, ob $I \in \mathcal{J}$ unabhängig ist oder nicht.
Vorteil eines Orakels: Orakelaufrufe werden in der Komplexitätsanalyse nur einmal gezählt und sie sind polynomial.

2.2 Greedy-Algorithmus MAX-INDEPENDENT-SET

1. **Greedy-Algorithmus MAX-INDEPENDENT-SET**
   Input: Ein Unabhängigkeitssystem $(S, \mathcal{J})$, gegeben durch ein Unabhängigkeitsorakel und eine Gewichtsfunktion $c : S \to \mathbb{R}_+$.
   Output: Eine Menge $I \in \mathcal{J}$.

   a) Ordne die Elemente in $S = \{s_1, s_2, \dots s_n\}$ absteigend nach ihrem Gewicht,s.d. $c(s_1) \geq c(s_2) \geq \dots \geq c(s_n)$
   b) Setzt $I := \emptyset$
   c) Wiederhole für $k = 1, \dots, n$: Falls $I \cup \{s_k\} \in \mathcal{J}$ füge $\{s_k\}$ zu I hinzu
   d) Gib die Menge I aus

   Der Greedy-Algorithmus kann zur Auffindung eines maximalen aufspannenden Waldes in einem Graphen $G = (V, E)$ genutzt werden.

2. **WH:aufspannender Wald**
   Ein *Wald* ist ein Graph der keine Kreise enthält. Und ein *aufspannender Wald* in einem Graphen ist ein Wald, der alle Knoten des Graphen enthält.

3. **Greedy-Max-Algorithmus: aufspannender Wald**
   Input: Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten c_e
   Output: Ein Wald $W \subseteq E$ mit maximalem Gewicht $c(W)$

   a) Die Gewichte der Kanten absteigend sortieren
   b) $W := \emptyset$
   c) Für $k = 1, \dots n$ führe durch:
      Falls $W \cup \{e_k\}$ keinen Kreis enthält,
      Setze: $W := W \cup \{e_k\}$
   d) Gib W aus.

4. **Anwendung**
   Vorallem beim Design von Transport-, Kommunikations-, Energie- und Computernetzwerken relevant.

5. **Problem**
   Der Greedy-Algorithmus findet optimale Lösungen, wenn er auf Matroiden arbeitet. Auf Mengensystemen die das Axiom $(M3)$ nicht erfüllen sind die Lösungen nicht optimal. Zum Beispiel: Matching in bipartiten Graphen

Dieses Problem motiviert den Satz von Edmonds über den Schnitt von Matroiden.

3 Satz von Edmonds

1. **Satz**
   Seien $(S, \mathcal{J}_1)$ und $(S, \mathcal{J}_2)$ zwei Matroide und r_1, r_2 die zugehörigen Rangfunktionen. Dann gilt:

$$max\{|I| : I \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2\} = min_{U \subseteq S}(r_1(U+)r_2(S \backslash U))$$

2. **Anwendung**: Matching in bipartiten Graphen $\approx$ Satz von König.
   Funktioniert auch für nicht-vollständige Graphen.

3. **Algorithmus von Edmonds**
   Edmonds entwickelte einen Algorithmus für den Schnitt von zwei Matroiden, der die Unabhängigkeitsmengen durch ein Orakel bestimmt und ein Element $I \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ ausgibt, das von maximaler Mächtigkeit ist.
   Er arbeitet über kürzeste Wege in bipartiten Hilfsgraphen und kann im Vgl mit Greedy Knoten hinzufügen *und* entfernen. Er löst das MATROID-INTERSECTION-PROBLEM in polyomialer Zeit.