Durchschnitt von Matroiden

Satz von Edmonds

Dany Sattler

18. Januar 2007/ Seminar zur ganzzahligen Optimierung / Wallenfels

Definition: Unabhängigkeitssystem

Definition:
Ein Mengensystem $(S, \mathcal{J})$ nennt man *Unabhängigkeitssystem*, falls folgende Axiome erfüllt sind:

- $(M1): \emptyset \in \mathcal{J}$
- $(M2): I_1 \subseteq I_2, I_2 \in \mathcal{J} \Rightarrow I_1 \in \mathcal{J}$

Definition: Unabhängigkeitssystem

Definition:
Ein Mengensystem $(S, \mathcal{J})$ nennt man *Unabhängigkeitssystem*, falls folgende Axiome erfüllt sind:

- $(M1) : \emptyset \in \mathcal{J}$
- $(M2) : I_1 \subseteq I_2, I_2 \in \mathcal{J} \Rightarrow I_1 \in \mathcal{J}$

Definition: Unabhängigkeitssystem

Definition:
Ein Mengensystem $(S, \mathcal{J})$ nennt man *Unabhängigkeitssystem*, falls folgende Axiome erfüllt sind:

- $(M1) : \emptyset \in \mathcal{J}$
- $(M2) : I_1 \subseteq I_2, I_2 \in \mathcal{J} \Rightarrow I_1 \in \mathcal{J}$

Definition: Unabhängigkeitssystem

Die Elemente von $\mathcal{J}$ werden unabhängig genannt, die Elemente von $2^S \backslash \mathcal{J}$ abhängig.

Minimale abhängige Mengen heißen *Kreise*, maximale unabhängige Mengen heißen *Basen*

Definition: Unabhängigkeitssystem

Die Elemente von $\mathcal{J}$ werden unabhängig genannt, die Elemente von $2^S \setminus \mathcal{J}$ abhängig.
Minimale abhängige Mengen heißen *Kreise*, maximale unabhängige Mengen heißen *Basen*

Definition: Matroid

Definition:
Ein Unabhängigkeitssystem $(S, \mathcal{J})$ heißt *Matroid*, falls gilt:

- $(M3)$: $I_1, I_2 \in \mathcal{J}$ und $|I_1| > |I_2|$ dann gibt es ein $x \in I_1 \setminus I_2$ mit $I_2 \cup \{x\} \in \mathcal{J}$

Definition: Matroid

Definition:

Ein Unabhängigkeitssystem $(S, \mathcal{J})$ heißt *Matroid*, falls gilt:

- $(M3)$: $I_1, I_2 \in \mathcal{J}$ und $|I_1| > |I_2|$ dann gibt es ein $x \in I_1 \backslash I_2$ mit $I_2 \cup \{x\} \in \mathcal{J}$

Definition: Rang eines Matroiden

Definition:
Sei $(S, \mathcal{J})$ ein Matroid. Dann ist für $U \subseteq S$ der Rang von U definiert durch:
$r\left(U\right) := max\left\{|I| : I \subseteq U, I \in \mathcal{J}\right\}$

Beispiel: Matrixmatroid

Matrixmatroid
Sei A eine Matrix mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Spalten der Matrix A, also $\{(1)\ldots(7)\}$, bilden die Menge S. Diejenigen Spalten von A, die zusammen linear unabhängig sind, bilden das System aus Teilmengen $\mathcal{J}$ von S.

Beispiel: Matrixmatroid

Dann enthält $\mathcal{J}$ alle diejenigen Teilmengen von S $\setminus \{(7\})$ mit höchstens 3 Elementen, außer:

$$\{(1)\,,(2)\,,(4)\}\,,\{(2)\,,(3)\,,(5)\}\,,\{(2)\,,(3)\,,(6)\}$$

und außer allen Teilmengen, die $\{(5)\,,(6)\}$ gemeinsam enthalten.

$\Rightarrow$ S stellt somit die Grundmenge des Matroiden dar und $\mathcal{J}$ das Unabhängigkeitssystem

$\Rightarrow$ das Paar $(S, \mathcal{J})$ ist ein Matroid.

Beispiel: Matrixmatroid

Dann enthält $\mathcal{J}$ alle diejenigen Teilmengen von S $\setminus \{(7\})$ mit höchstens 3 Elementen, außer:

$$\{(1),(2),(4)\},\{(2),(3),(5)\},\{(2),(3),(6)\}$$

und außer allen Teilmengen, die $\{(5),(6)\}$ gemeinsam enthalten.
$\Rightarrow$ S stellt somit die Grundmenge des Matroiden dar und $\mathcal{J}$ das Unabhängigkeitssystem
$\Rightarrow$ das Paar $(S, \mathcal{J})$ ist ein Matroid.

Beispiel: Matrixmatroid

Dann enthält $\mathcal{J}$ alle diejenigen Teilmengen von S $\setminus \{(7\})$ mit höchstens 3 Elementen, außer:

$$\{(1),(2),(4)\},\{(2),(3),(5)\},\{(2),(3),(6)\}$$

und außer allen Teilmengen, die $\{(5),(6)\}$ gemeinsam enthalten.
$\Rightarrow$ S stellt somit die Grundmenge des Matroiden dar und $\mathcal{J}$ das Unabhängigkeitssystem
$\Rightarrow$ das Paar $(S,\mathcal{J})$ ist ein Matroid.

Beispiel: Graphenmatroid

Graphenmatroid

Wir haben den Graphen $G = (V, E)$ mit 4 Ecken $\{a, b, c, d\}$ und mit 7 Kanten $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Sei S die Menge der Kanten, also S = E und $\mathcal{J}$ sei das System der Teilmengen von S, die *kreisfrei* sind.

Die Kreise von G haben die Kantenmenge:

$$\{(7), (5, 6), (1, 2, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (1, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6)\}$$

$\Rightarrow (S, \mathcal{J})$ ist somit ein Matroid, genauer ein Graphen-Matroid,der mit$M(G)$ bezeichnet wird.

Beispiel: Graphenmatroid

Graphenmatroid
Wir haben den Graphen $G = (V, E)$ mit 4 Ecken $\{a, b, c, d\}$ und mit 7 Kanten $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
Sei S die Menge der Kanten, also S = E und $\mathcal{J}$ sei das System der Teilmengen von S, die *kreisfrei* sind.
Die Kreise von G haben die Kantenmenge:

$$\{(7), (5, 6), (1, 2, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (1, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6)\}$$

$\Rightarrow (S, \mathcal{J})$ ist somit ein Matroid, genauer ein Graphen-Matroid,der mit$M(G)$ bezeichnet wird.

Beispiel: Graphenmatroid

Graphenmatroid

Wir haben den Graphen $G = (V, E)$ mit 4 Ecken $\{a, b, c, d\}$ und mit 7 Kanten $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Sei S die Menge der Kanten, also S = E und $\mathcal{J}$ sei das System der Teilmengen von S, die *kreisfrei* sind.

Die Kreise von G haben die Kantenmenge:

$$\{(7)\,,(5,6)\,,(1,2,4)\,,(2,3,5)\,,(2,3,6)\,,(1,3,4,5)\,,(1,3,4,6)\}$$

$\Rightarrow (S, \mathcal{J})$ ist somit ein Matroid, genauer ein Graphen-Matroid,der mit$M\,(G)$ bezeichnet wird.

Beispiel: Graphenmatroid

Graphenmatroid
Wir haben den Graphen $G = (V, E)$ mit 4 Ecken $\{a, b, c, d\}$ und mit 7 Kanten $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
Sei S die Menge der Kanten, also S = E und $\mathcal{J}$ sei das System der Teilmengen von S, die *kreisfrei* sind.
Die Kreise von G haben die Kantenmenge:

$$\{(7), (5, 6), (1, 2, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (1, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6)\}$$

$\Rightarrow (S, \mathcal{J})$ ist somit ein Matroid, genauer ein Graphen-Matroid,der mit$M(G)$ bezeichnet wird.

Beispiel: Graphenmatroid

Dieser Matroid kann auch in eine Matrix umgeformt werden über Ecken-Kanten-Indizes
Dabei: Falls Verbindung besteht: = 1; sonst: = 0;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei hier gilt: Spalte i = Kante i mit i = 1,...,7 und
Zeile j = Ecke j mit j = a,b,c,d

Beispiel: Graphenmatroid

Dieser Matroid kann auch in eine Matrix umgeformt werden über Ecken-Kanten-Indizes
Dabei: Falls Verbindung besteht: = 1; sonst: = 0;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei hier gilt: Spalte i = Kante i mit i = 1,...,7 und
Zeile j = Ecke j mit j = a,b,c,d

Wiederholung: Bipartiter Graph und Matching

1. **Bipartiter Graph**
   ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, falls sich seine Knoten V in zwei disjunkte Teilmengen V_1, V_2 aufteilen lassen, s.d. zwischen den Knoten innerhalb beider Teilmengen keine Kanten verlaufen.
2. **Matching**
   Ein *Matching* ist eine Teilmenge der Kanten eines Graphen G, in der keine zwei Kanten einen gemeinsamen Knoten besitzen.

Wiederholung: Bipartiter Graph und Matching

1. **Bipartiter Graph**
   ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, falls sich seine Knoten V in zwei disjunkte Teilmengen V_1, V_2 aufteilen lassen, s.d. zwischen den Knoten innerhalb beider Teilmengen keine Kanten verlaufen.
2. **Matching**
   Ein *Matching* ist eine Teilmenge der Kanten eines Graphen G, in der keine zwei Kanten einen gemeinsamen Knoten besitzen.

Motivation

1. **Matching in bipartiten Graphen**
   $\mathcal{M}$ stellt die Menge aller Matchings in einem bipartiten Graphen $G = \{V_1 \dot{\cup} V_2, E = (V_1 \times V_2)\}$ dar.
   $\mathcal{M} \subseteq 2^E$,
2. **Proposition**
   $(E, \mathcal{M})$ ist **kein** Matroid.

Motivation

1. **Matching in bipartiten Graphen**
   $\mathcal{M}$ stellt die Menge aller Matchings in einem bipartiten Graphen $G = \{V_1 \dot{\cup} V_2, E = (V_1 \times V_2)\}$ dar.
   $\mathcal{M} \subseteq 2^E$,
2. **Proposition**
   $(E, \mathcal{M})$ ist **kein** Matroid.

Motivation

Beobachtung

Sei $(E, \mathcal{M}) = (E, \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2)$ mit $(E, \mathcal{J}_1), (E, \mathcal{J}_2)$ Matroide, mit:

$$\mathcal{J}_1 := \{F \subseteq E : (v_1, w_1) \in F, (v_2, w_2) \in F \Rightarrow v_1 \neq v_2\}$$

$$\mathcal{J}_2 := \{F \subseteq E : (v_1, w_1) \in F, (v_2, w_2) \in F \Rightarrow w_1 \neq w_2\}$$

Dann ist $\mathcal{J}_1$ ein Matroid.

Charakterisierung anhand von Kreisen

$(S, \mathcal{J})$ ein Matroid und $\mathcal{C}$ ein System von Teilmengen. Dann heißt $\mathcal{C}$ die Menge der Kreise von $(S, \mathcal{J})$, wenn gilt:

- $(C1)$: Die leere Menge liegt nicht in $\mathcal{C}$: $\emptyset \notin C$
- $(C2)$: Kein Element von $\mathcal{C}$ ist eine echte Teilmenge eines weiteren Elements von $\mathcal{C}$
- $(C3)$: C_1, C_2 sind zwei Elemente von $\mathcal{C}$ und $e \in C_1 \cap C_2$, dann enthält $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ ein Element von C.

$(S, \mathcal{J})$ ist ein Matroid, wenn $\mathcal{C}$ den Axiomen $(C1), (C2), (C3)$ genügt und $\mathcal{J}$ aus denjenigen Teilmengen von S besteht, die kein Element von $\mathcal{C}$ enthalten

Charakterisierung anhand von Kreisen

$(S, \mathcal{J})$ ein Matroid und $\mathcal{C}$ ein System von Teilmengen. Dann heißt $\mathcal{C}$ die Menge der Kreise von $(S, \mathcal{J})$, wenn gilt:

- $(C1)$: Die leere Menge liegt nicht in $\mathcal{C}$: $\emptyset \notin C$
- $(C2)$: Kein Element von $\mathcal{C}$ ist eine echte Teilmenge eines weiteren Elements von $\mathcal{C}$
- $(C3)$: C_1, C_2 sind zwei Elemente von $\mathcal{C}$ und $e \in C_1 \cap C_2$, dann enthält $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ ein Element von C.

$(S, \mathcal{J})$ ist ein Matroid, wenn $\mathcal{C}$ den Axiomen $(C1), (C2), (C3)$ genügt und $\mathcal{J}$ aus denjenigen Teilmengen von S besteht, die kein Element von $\mathcal{C}$ enthalten

Charakterisierung anhand von Kreisen

$(S, \mathcal{J})$ ein Matroid und $\mathcal{C}$ ein System von Teilmengen. Dann heißt $\mathcal{C}$ die Menge der Kreise von $(S, \mathcal{J})$, wenn gilt:

- $(C1)$: Die leere Menge liegt nicht in $\mathcal{C}$: $\emptyset \notin C$
- $(C2)$: Kein Element von $\mathcal{C}$ ist eine echte Teilmenge eines weiteren Elements von $\mathcal{C}$
- $(C3)$: C_1, C_2 sind zwei Elemente von $\mathcal{C}$ und $e \in C_1 \cap C_2$, dann enthält $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ ein Element von C.

$(S, \mathcal{J})$ ist ein Matroid, wenn $\mathcal{C}$ den Axiomen $(C1), (C2), (C3)$ genügt und $\mathcal{J}$ aus denjenigen Teilmengen von S besteht, die kein Element von $\mathcal{C}$ enthalten

Charakterisierung anhand von Kreisen

$(S, \mathcal{J})$ ein Matroid und $\mathcal{C}$ ein System von Teilmengen. Dann heißt $\mathcal{C}$ die Menge der Kreise von $(S, \mathcal{J})$, wenn gilt:

- $(C1)$: Die leere Menge liegt nicht in $\mathcal{C}$: $\emptyset \notin C$
- $(C2)$: Kein Element von $\mathcal{C}$ ist eine echte Teilmenge eines weiteren Elements von $\mathcal{C}$
- $(C3)$: C_1, C_2 sind zwei Elemente von $\mathcal{C}$ und $e \in C_1 \cap C_2$, dann enthält $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ ein Element von C.

$(S, \mathcal{J})$ ist ein Matroid, wenn $\mathcal{C}$ den Axiomen $(C1), (C2), (C3)$ genügt und $\mathcal{J}$ aus denjenigen Teilmengen von S besteht, die kein Element von $\mathcal{C}$ enthalten

Charakterisierung anhand von Kreisen

$(S, \mathcal{J})$ ein Matroid und $\mathcal{C}$ ein System von Teilmengen. Dann heißt $\mathcal{C}$ die Menge der Kreise von $(S, \mathcal{J})$, wenn gilt:

- $(C1)$: Die leere Menge liegt nicht in $\mathcal{C}$: $\emptyset \notin C$
- $(C2)$: Kein Element von $\mathcal{C}$ ist eine echte Teilmenge eines weiteren Elements von $\mathcal{C}$
- $(C3)$: C_1, C_2 sind zwei Elemente von $\mathcal{C}$ und $e \in C_1 \cap C_2$, dann enthält $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ ein Element von C.

$(S, \mathcal{J})$ ist ein Matroid, wenn $\mathcal{C}$ den Axiomen $(C1), (C2), (C3)$ genügt und $\mathcal{J}$ aus denjenigen Teilmengen von S besteht, die kein Element von $\mathcal{C}$ enthalten

Charakterisierung anhand einer Basis

Sei $\mathcal{B}$ ein System von Teilmengen einer endlichen Menge S. Dann ist $\mathcal{B}$ die Menge der Basen des Matroiden $(S, \mathcal{J}) \Leftrightarrow \mathcal{B}$ erfüllt folgende Axiome:

- $(B1)$: $\mathcal{B}$ ist nicht leer
- $(B2)$: $(B_1, B_2) \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \setminus B_2$, dann $\exists y \in B_1 \setminus B_2$ so, dass $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$

Charakterisierung anhand einer Basis

Sei $\mathcal{B}$ ein System von Teilmengen einer endlichen Menge S. Dann ist $\mathcal{B}$ die Menge der Basen des Matroiden $(S, \mathcal{J}) \Leftrightarrow \mathcal{B}$ erfüllt folgende Axiome:

- $(B1)$: $\mathcal{B}$ ist nicht leer
- $(B2)$: $(B_1, B_2) \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \backslash B_2$, dann $\exists y \in B_1 \backslash B_2$ so, dass $(B_1 \backslash \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$

Charakterisierung anhand einer Rangfunktion

Sei S eine endliche Menge und r definiert durch $r : 2^S \rightarrow \mathbb{Z}_+$
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. r ist die *Rangfunktion* des Matroiden $(S, \mathcal{J})$ und $\mathcal{J} = \{I \subseteq S : r(I) = |I|\}$
2. $\forall X, Y \subseteq S$ gilt:
   - $(R1) : r(X) \leq |X|$
   - $(R2) :$ Falls $X \subseteq Y$, gilt $r(X) \leq r(Y)$
   - $(R3) : r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

Charakterisierung anhand einer Rangfunktion

Sei S eine endliche Menge und r definiert durch $r : 2^S \rightarrow \mathbb{Z}_+$
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. r ist die *Rangfunktion* des Matroiden $(S, \mathcal{J})$ und $\mathcal{J} = \{I \subseteq S : r(I) = |I|\}$
2. $\forall X, Y \subseteq S$ gilt:
   - $(R1) : r(X) \leq |X|$
   - $(R2)$: Falls $X \subseteq Y$, gilt $r(X) \leq r(Y)$
   - $(R3) : r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

Charakterisierung anhand einer Rangfunktion

Sei S eine endliche Menge und r definiert durch $r : 2^S \rightarrow \mathbb{Z}_+$
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. r ist die *Rangfunktion* des Matroiden $(S, \mathcal{J})$ und $\mathcal{J} = \{I \subseteq S : r(I) = |I|\}$
2. $\forall X, Y \subseteq S$ gilt:
   - $(R1) : r(X) \leq |X|$
   - $(R2)$: Falls $X \subseteq Y$, gilt $r(X) \leq r(Y)$
   - $(R3) : r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

Charakterisierung anhand einer Rangfunktion

Sei S eine endliche Menge und r definiert durch $r : 2^S \rightarrow \mathbb{Z}_+$
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. r ist die *Rangfunktion* des Matroiden $(S, \mathcal{J})$ und $\mathcal{J} = \{I \subseteq S : r(I) = |I|\}$
2. $\forall X, Y \subseteq S$ gilt:
   - $(R1) : r(X) \leq |X|$
   - $(R2)$: Falls $X \subseteq Y$, gilt $r(X) \leq r(Y)$
   - $(R3) : r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

Charakterisierung anhand einer Rangfunktion

Sei S eine endliche Menge und r definiert durch $r : 2^S \rightarrow \mathbb{Z}_+$
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. r ist die *Rangfunktion* des Matroiden $(S, \mathcal{J})$ und $\mathcal{J} = \{I \subseteq S : r(I) = |I|\}$
2. $\forall X, Y \subseteq S$ gilt:
   - $(R1) : r(X) \leq |X|$
   - $(R2)$: Falls $X \subseteq Y$, gilt $r(X) \leq r(Y)$
   - $(R3) : r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

Optimierungsproblem: maximale unabhängige Menge

Gegeben:$(S, \mathcal{J})$ ein Unabhängigkeitssystem und $c : S \to \mathbb{R}_+$ eine positive Gewichtsfunktion auf den Elementen von S.
Gesucht:ein maximales Element $I \in \mathcal{J}$, dessen Gesamtgewicht

$$c(I) = \sum_{s \in I} c(s)$$

maximal ist.

Unabhängigkeitsorakel

Problem: kompakte Darstellung von $\mathcal{J}$.
Ein Orakel allgemein, in diesem Fall ein Unabhängigkeitsorakel, ist ein Algorithmus, der mit dem Input einer Menge $\mathcal{J} \subseteq S$ entscheidet, ob $I \in \mathcal{J}$ unabhängig ist oder nicht.
Vorteil: Orakelaufrufe werden in der Komplexitätsanalyse nur einmal gezählt und sie sind polynomial.

Unabhängigkeitsorakel

Problem: kompakte Darstellung von $\mathcal{J}$.
Ein Orakel allgemein, in diesem Fall ein Unabhängigkeitsorakel, ist ein Algorithmus, der mit dem Input einer Menge $\mathcal{J} \subseteq S$ entscheidet, ob $I \in \mathcal{J}$ unabhängig ist oder nicht.
Vorteil: Orakelaufrufe werden in der Komplexitätsanalyse nur einmal gezählt und sie sind polynomial.

Greedy-Algorithmus MAX-INDEPENDENT-SET

Input: Ein Unabhängigkeitssystem $(S, \mathcal{J})$ gegeben durch ein Unabhängigkeitsorakel und eine Gewichtsfunktion c.
Output: Eine Menge $I \in \mathcal{J}$

1. Ordne die Elemente in $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ absteigend nach ihrem Gewicht, d.h. $c(s_1) \geq \ldots \geq c(s_n)$
2. Setze $I = \emptyset$
3. Wiederhole für $k = 1, \ldots, n$:
   Falls $I \cup \{s_k\} \in \mathcal{J}$
   füge $\{s_k\}$ zu I hinzu
4. Gib die Menge I aus.

Greedy-Algorithmus MAX-INDEPENDENT-SET

Input: Ein Unabhängigkeitssystem $(S, \mathcal{J})$ gegeben durch ein Unabhängigkeitsorakel und eine Gewichtsfunktion c.
Output: Eine Menge $I \in \mathcal{J}$

1. Ordne die Elemente in $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ absteigend nach ihrem Gewicht, d.h. $c(s_1) \geq \ldots \geq c(s_n)$
2. Setze $I = \emptyset$
3. Wiederhole für $k = 1, \ldots, n$:
   Falls $I \cup \{s_k\} \in \mathcal{J}$
   füge $\{s_k\}$ zu I hinzu
4. Gib die Menge I aus.

Greedy-Algorithmus MAX-INDEPENDENT-SET

Input: Ein Unabhängigkeitssystem $(S, \mathcal{I})$ gegeben durch ein Unabhängigkeitsorakel und eine Gewichtsfunktion c.
Output: Eine Menge $I \in \mathcal{I}$

1. Ordne die Elemente in $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ absteigend nach ihrem Gewicht, d.h. $c(s_1) \geq \ldots \geq c(s_n)$
2. Setze $I = \emptyset$
3. Wiederhole für $k = 1, \ldots, n$:
   Falls $I \cup \{s_k\} \in \mathcal{I}$
   füge $\{s_k\}$ zu I hinzu
4. Gib die Menge I aus.

Greedy-Algorithmus MAX-INDEPENDENT-SET

Input: Ein Unabhängigkeitssystem $(S, \mathcal{J})$ gegeben durch ein Unabhängigkeitsorakel und eine Gewichtsfunktion c.
Output: Eine Menge $I \in \mathcal{J}$

1. Ordne die Elemente in $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ absteigend nach ihrem Gewicht, d.h. $c(s_1) \geq \ldots \geq c(s_n)$
2. Setze $I = \emptyset$
3. Wiederhole für $k = 1, \ldots, n$:
   Falls $I \cup \{s_k\} \in \mathcal{J}$
   füge $\{s_k\}$ zu I hinzu
4. Gib die Menge I aus.

Greedy-Algorithmus: max aufspannender Wald

WH: Ein aufspannender Wald in einem Graphen G ist ein Wald der alle Knoten des des Graphen enthält.
Wald bedeutet: der Graph enthält keine Kreise.

Greedy-Max-Algorithmus: aufspannender Wald
Input: Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten c_e
Output: Ein Wald $W \subseteq E$ mit maximalem Gewicht.
Schritt 1, 2, 4 sind wie oben. Schritt 3: Für $k = 1, \ldots, n$ führe durch: Falls $W \cup \{e_k\}$ *keinen* Kreis enthält, setze $W := W \cup \{e_k\}$

Greedy-Algorithmus: max aufspannender Wald

WH: Ein aufspannender Wald in einem Graphen G ist ein Wald der alle Knoten des des Graphen enthält.
Wald bedeutet: der Graph enthält keine Kreise.

Greedy-Max-Algorithmus: aufspannender Wald

Input: Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten c_e
Output: Ein Wald $W \subseteq E$ mit maximalem Gewicht.
Schritt 1, 2, 4 sind wie oben. Schritt 3: Für $k = 1, \ldots, n$ führe durch: Falls $W \cup \{e_k\}$ *keinen* Kreis enthält, setze $W := W \cup \{e_k\}$

Anwendung und Probleme

1. **Anwendung**
   Vorallem beim Design von Transport-, Kommunikations,- Energie- und Computernetzwerken.
2. **Problem**
   Der Greedy-Algorithmus findet optimale Lösungen, wenn er auf Matroiden angewendet wird. Auf Mengensystemen die das Axiom $(M3)$ nicht erfüllen sind die Lösungen nicht optimal. Zum Beispiel bei bipartitem Matching

Anwendung und Probleme

1. **Anwendung**
   Vorallem beim Design von Transport-, Kommunikations,- Energie- und Computernetzwerken.
2. **Problem**
   Der Greedy-Algorithmus findet optimale Lösungen, wenn er auf Matroiden angewendet wird. Auf Mengensystemen die das Axiom $(M3)$ nicht erfüllen sind die Lösungen nicht optimal. Zum Beispiel bei bipartitem Matching

Satz von Edmonds

1. **Satz**
   Seien $(S, \mathcal{J}_1)$ und $(S, \mathcal{J}_2)$ zwei Matroide und r_1, r_2 die zugehörigen Rangfunktionen. Dann gilt:

   $$max\,\{|I| : I \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2\} = min_{U \subseteq S}\,(r_1\,(U) + r_2\,(S \setminus U))$$

2. **Anwendung**: Matching in bipartiten Graphen $\approx$ Satz von König.

Satz von Edmonds

1. **Satz**
   Seien $(S, \mathcal{J}_1)$ und $(S, \mathcal{J}_2)$ zwei Matroide und r_1, r_2 die zugehörigen Rangfunktionen. Dann gilt:

   $$max\{|I| : I \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2\} = min_{U \subseteq S}(r_1(U) + r_2(S \backslash U))$$

2. **Anwendung**: Matching in bipartiten Graphen $\approx$ Satz von König.

Satz von Edmonds

Algorithmus von Edmonds
Edmonds entwickelte einen Algorithmus für den Schnitt von zwei Matroiden, der die Unabhängigkeitsmengen durch ein Orakel bestimmt und ein Element $I \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ ausgibt, das von maximaler Mächtigkeit ist. Er arbeitet über kürzeste Wege in bipartiten Hilfsgraphen und kann im Vgl. mit Greedy-Alg. Knoten hinzufügen *und* entfernen. Er löst das MATROID-INTERSECTION-PROBLEM in polynomialer Zeit.