Satz 4.4. Es seine $A \in \mathbb{K}^{p\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{q\times n}$, $a \in \mathbb{K}^p$, $b \in \mathbb{K}^q$, dann gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen:

(a) $\exists x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax \leq a$, $Bx < b$,

(b) (i) $\exists\, u \in \mathbb{K}^p_+, v \in \mathbb{K}^q_+\backslash\{0\}$ mit $u^TA + v^TB = 0^T$, $u^Ta + v^Tb \leq 0$, oder

(ii) $\exists\, u \in \mathbb{K}^p_+$ mit $u^TA = 0^T$, $u^Ta < 0$.

Beweis. Ang. (a) und (b)(ii) gelten gleichzeitig, dann gibt es also einen Vektor x mit $Ax \leq a$ und einen Vektor $u \geq 0$ mit $u^TA = 0^T$, $u^Ta < 0$, was dem Farkas-Lemma widerspricht. Ang. (a) und (b)(ii) gelten gleichzeitig, dann gilt $0^Tx = (u^TA + v^TB)x = u^T(Ax) + v^T(Bx) < u^Ta + v^Tb \leq 0$, ein Widerspruch.

Wir nehmen nun an, dass (a) nicht gilt und wenden die Fourier-Motzkin-Elimination n mal iterativ auf $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ an. Nach n Schritten erhalten wir Matrizen C, D und Vektoren c, d, so dass $Ax \leq a$, $Bx < b$ genau dann lösbar ist, wenn $Cx \leq c$ und $Dx < d$ lösbar ist, wobei $C = D = 0$ gilt. Es muss somit einen Zeilen Index i von C mit $c_i < 0$ oder einen Zeilenindex j von D geben mit $d_j \leq 0$.

Ist $Ax \leq a$ nicht lösbar, so gilt (b)(ii) nach dem Farkas-Lemma. Ist $Ax \leq a$ lösbar, so ist auch $0 = Cx \leq c$ lösbar und es gilt $c_i \geq 0$ für alle i. Also gibt es ein j mit $d_j \leq 0$. $D_{j\cdot} = 0^T$ ist eine konische Kombination von Zeilen von A und B, wobei mindestens eine Zeile von B mit einem positiven Multiplikator verwendet wird. Also gibt es $u \in \mathbb{K}^p_+, v \in \mathbb{K}^q_+\backslash\{0\}$ mit $u^TA + v^TB = 0^T$ und $u^Ta + v^Tb = d_j \leq 0$. $\square$

Folgerung 4.5. Ist $P(A,a) \neq \emptyset$, dann gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen:

(a) $\exists\, x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax \leq a$, $Bx < b$,

(b) $\exists \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_+^{p+q}, v \neq 0$ mit $u^T A + v^T B = 0^T$ und $u^T a + v^T b \leq 0$.

Satz 4.6 (Gordan, 1873). Es gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen:

(a) $\exists\, x$ mit $Ax < 0$,

(b) $\exists\, u \geq 0$, $u \neq 0$ mit $u^T A = 0^T$.

Beweis. Setzte in (4.5) $B := A$ (wobei A die obige Matrix ist), $b := 0$, $A := 0$, $a := 0$. □

Satz 4.7 (Stiemke, 1915). Es gilt genau eine der folgenden Alternativen:

(a) $\exists\, x > 0$ mit $Ax = 0$,

(b) $\exists\, u$ mit $u^T \geq 0^T$, $u^T A \neq 0$.

Beweis. Setze in (4.5) $B := -I$, $b := 0$, $A := \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$, $a := 0$. □