

1. Übungsblatt

Abgabe: 31.10.2005 – vor der Vorlesung

Bitte jeweils die ersten und die letzten beiden Aufgaben auf unterschiedlichen Blättern abgeben.

Aufgabe 1: Das Transportproblem

Eine Transportfirma ist beauftragt worden eine Ware von m Stellen (Quellen) zu n Zielen zu befördern. An der i -ten Quelle gibt es a_i Einheiten der Ware ($i = 1, \dots, m$) und es müssen mindestens b_j Einheiten der Ware zum j -ten Ziel ($j = 1, \dots, n$) transportiert werden. Der Auftraggeber ist bereit, c_{ij} pro Wareneinheit für den Transport von Quelle i zum Ziel j zu zahlen.

Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm, so dass die Einnahmen der Firma maximiert werden. **4 Punkte**

Aufgabe 2: Bestimmen Sie notwendige und hinreichende Bedingungen an s und t , so dass das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{so dass} \quad & sx_1 + tx_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) mindestens eine Optimallösung besitzt,
- (ii) genau eine Optimallösung besitzt,
- (iii) keine zulässige Lösung besitzt,
- (iv) unbeschränkt ist,

bzw. zeigen Sie, dass der Fall nicht auftreten kann.

4 Punkte

Aufgabe 3: Betrachten Sie das folgende vereinfachte Mischungsproblem für Flugbenzin. Eine Raffinerie produziert unter anderem zwei Sorten von Flugbenzin. Die Sorte L hat eine niedrige Oktanzahl, Sorte H eine hohe. Beide Sorten Flugbenzin werden aus vier verschiedenen Zwischenprodukten hergestellt, die alle in der Raffinerie produziert werden, nämlich Alkylat, katalytisch „gecracktes“ Benzin, Rohbenzin und Isopentan. Überschüsse dieser Zwischenprodukte, die nicht zu Flugbenzin verarbeitet werden, gehen in die ebenfalls von der Raffinerie betriebene Autobenzinproduktion. Der Autobenzinproduktionsprozess wird aber

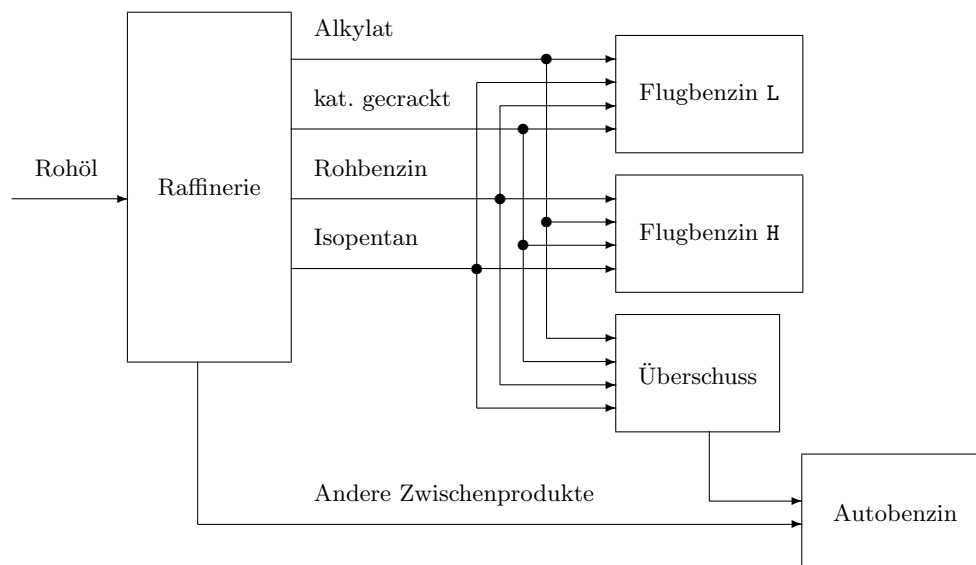


Abbildung 1: Flugbenzinproduktion.

nicht als Teil der Mischungsproblems für Flugbenzin betrachtet; er spielt nur insofern eine Rolle, als er überschüssige Zwischenprodukte aus der Flugbenzinproduktion absorbiert. Gerechtfertigt wird diese Vereinfachung durch die Tatsache, dass die überschüssigen Zwischenprodukte nur einen geringen Bruchteil der zur Produktion von Autobenzin benötigten Zwischenprodukte ausmachen. Die Produktion von Flugbenzin ist in Abbildung 1 schematisch dargestellt.

Die beiden Sorten Flugbenzin müssen bestimmten Qualitätsanforderungen entsprechen. Abhängig von der Sorte darf ein gewisser maximaler Dampfdruck VP nicht überschritten und eine minimale Oktanzahl ON nicht unterschritten werden. Für beide Sorten gibt es eine gewisse tägliche Nachfrage; es muss täglich für jede der beiden Sorten genau so viel produziert werden, wie nachgefragt wird. Die entsprechenden Daten für die Autobenzinproduktion stehen nicht zur Verfügung, da dieser Produktionsprozess nicht als Teil des Problems angesehen wird. Da aber sehr viel mehr Autobenzin produziert wird, als in der Flugbenzinproduktion überschüssige Zwischenprodukte anfallen, kann die Nachfrage nach Autobenzin als unbegrenzt groß angesehen werden. Tabelle 1 beschreibt die Anforderungen an den Dampfdruck VP und die Oktanzahl ON für die beiden Sorten Flugbenzin, die tägliche Nachfrage und die Verkaufserlöse pro Barrel. Bekannt sind auch die durchschnittlichen Daten für den Dampfdruck und die Oktanzahl der verarbeiteten Zwischenprodukte. Die Oktanzahl kann durch Zugabe kleiner Mengen des Antiklopfmittels Bleitetraethyl TEL erhöht werden. Die Oktanzahl steigt aber nicht linear mit der zugegebenen Menge TEL . Um diese Nichtlinearität behandeln zu können, nehmen wir vereinfachend an, dass das Flugbenzin L mit 1,2 ml TEL pro Gallone versetzt wird, H mit 4 ml pro Gallone. Tabelle 2 gibt einen Überblick über Dampfdruck und Oktanzahl der Zwischenprodukte, versetzt mit 1,2 und 4 ml TEL pro Gallone, die täglich in der Raffinerie produzierten Mengen und die Herstellungskosten (ohne TEL).

Produkt	VP	ON	Nachfrage in Bbl/Tag	Verkaufserlös in \$/Bbl
Flugbenzin L	7	90	1300	6,50
Flugbenzin H	7	100	800	7,50
Autobenzin	–	–	unbegrenzt	–

Tabelle 1: Flugbenzin L und H.

Zwischenprodukt	VP	ON bei 1,2 ml TEL	ON bei 4 ml TEL	Produktion in Bbl/Tag	Kosten in \$/Bbl
Alkylat	5	98	108	700	7,20
kat. gecrackt	6,5	87	94	600	4,35
Rohbenzin	4	80	87	900	3,80
Isopentan	18	100	108	500	4,30

Tabelle 2: Zwischenprodukte.

Das Mischungsproblem für Flugbenzin besteht nun daraus, zu entscheiden, welche Menge jeden Zwischenproduktes mit den genannten Eigenschaften zur Produktion von Flugbenzin L bzw. H verwendet wird, wobei die entsprechenden Qualitätsanforderungen eingehalten werden müssen. Von beiden Sorten muss dabei täglich genau so viel produziert werden, wie nachgefragt wird. Maximiert werden soll der Gewinn, d. h. die Differenz zwischen Erlösen und Kosten. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm und *raten* Sie eine möglichst gute Lösung (1 Zusatzpunkt). **4 Punkte + 1 Zusatzpunkt**

Aufgabe 4: Betrachten Sie folgendes Problem:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & |x_1| + 2|x_2| + |x_3| \\ \text{so dass} \quad & x_1 + x_2 - x_3 \leq 10 \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 12 \end{aligned}$$

Konvertieren Sie dieses Problem in ein lineares Programm in Standardform. (Tipp: Modelliere eine unbeschränkte Variable x durch zwei beschränkte Variablen $x, x' \geq 0$.) Finden Sie die optimale Lösung. **4 Punkte**