Universität Bayreuth
Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik
Prof. Dr. Jörg Rambau
Dr. Sascha Kurz

Lineare Optimierung
WS 2005/06

10. Übungsblatt

Abgabe: 16.01.2006 – vor der Vorlesung

Bitte jeweils die ersten und die letzten beiden Aufgaben auf unterschiedlichen Blättern abgeben.

Aufgabe 37: Lösen Sie das folgende lineare Programm mit dem dualen Simplexalgorithmus:

$$\begin{aligned}
\min\ & x_1 + 2x_2 \\
& x_1 + x_2 \geq 3 \\
& x_2 \geq 2 \\
& -x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 1 \\
& x_1 - x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

4 Punkte

Aufgabe 38: Betrachten Sie das folgende lineare Programm (P):

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & 3x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s. t.} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\
& 2x_1 & - & 2x_2 & \leq & 7 \\
& 1 & \leq & x_1 & \leq & 4 \\
& 0 & \leq & x_2 & \leq & 3.
\end{array}$$

(a) Transformieren Sie (P) auf ein Problem $(\bar{P})$ der Form

$$\begin{array}{rcccl}
\max & c^T x & & & \\
& Ax & = & b & \\
0 & \leq & x & \leq & u.
\end{array}$$

(b) Lösen Sie $(\bar{P})$ mit der Obere-Schranken-Technik.

(c) Wie lautet die Lösung des Ausgangsproblems?

4 Punkte

Aufgabe 39: Falls nichts anderes gesagt wird, betrachten wir im folgenden immer ein LP in Standardform $\max c^T x$, s. t. $Ax = b$, $x \geqslant 0$, das die Generalvoraussetzungen für Kapitel 9 der Vorlesung erfüllt. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen, und machen Sie sich gegebenenfalls auch Gedanken darber, welche *Teil*aussagen richtig oder falsch sind.

(a) Eine Basislösung x_B eines LPs in Standardform ist genau dann optimal, wenn für die zugehörigen reduzierten Kosten $\overline{c} \leqslant 0$ gilt.

(b) B sei eine optimale Basis eines LPs in Standardform. Erhöht man nun den Wert einer Nichtbasisvariablen über Null und passt die Werte der Basisvariablen vermöge der Gleichung $x_B = \overline{b} - \overline{A}x_N$ an, so sinkt der Zielfunktionswert.

(c) Ist x eine nicht zulässige Basislösung und gilt für die zugehörigen reduzierten Kosten $\overline{c} \leq 0$, so ist $c^T x \geq c^T y$ für alle zulässigen Lösungen y.

(d) Hat das LP $\max c^T x$, s. t. $Ax = b$, $x \geq 0$, einen endlichen Optimalwert, so ist das LP $\max c^T x$, s. t. $Ax = b'$, $x \geq 0$, für alle b' beschränkt.

(e) Die Anzahl positiver x_j in einer zulässigen Basislösung überschreitet nicht den Rang der Matrix A.

(f) Die Anzahl der Optimallösungen sowie der zulässigen Basislösungen sind endlich.

(g) Zu jedem LP in n unbeschränkten Variablen gibt es ein äquivalentes LP in $n + 1$ nichtnegativen Variablen.

(h) Die beiden LPs $\max\ c^T x$, s. t. $Ax \leq b$, und $\max\ -c^T x$, s. t. $Ax \leq b$, können beide zulässige Lösungen mit beliebig großem Zielfunktionswert haben.

4 Punkte

Aufgabe 40: Restaurantbesitzer Luigi (L) plant die Erweiterung seines Lokals. Dazu möchte er einen bisher ungenutzten Nebenraum von $180\,\text{m}^2$ als Grillstube einrichten. Geplant sind eine Biertheke mit Barhockern sowie Tische für 4 bis 10 Personen. Damit L. bei der Anordnung der Tische möglichst flexibel ist, will er nur eine Tischgröße anschaffen, die für 4 Personen ausreichend Platz bietet. Durch entsprechendes Aneinanderreihen mehrerer dieser Tische können jederzeit Tischgrößen für 6 Personen (2 Tische), 8 Personen (3 Tische) bzw. 10 Personen (4 Tische) zusammengestellt werden. Für die normale Bestuhlung braucht L. mindestens folgende Tischgrößen: 6 Stück für 4 Personen, 6 Stück für 6 Personen, 4 Stück für 8 Personen und 2 Stück für 10 Personen.

Für größere Gesellschaften möchte L. in der Lage sein, die Tische z. B. in Hufeisenform anzuordnen. Zu diesem Zweck braucht er als Reserve mindestens 12 zusätzliche Tische und 38 zusätzliche Stühle.

Die Hausbrauerei bietet L. zum Vorzugspreis Stühle für 60 EUR/Stück, Tische für 90 EUR/Stück und Barhocker zu 70 EUR/Stück an. Die Bartheke stellt die Brauerei kostenlos zur Verfügung.

L. benötigt für jeden Tisch 5 Stofftischdecken zu je 40 EUR/Stück. Für den gesamten Nebenraum muss mit 15 000 EUR Renovierungskosten gerechnet werden. L. verfügt über 25 000 EUR Eigenkapital und kann bei der Brauerei ein zinsfreies Darlehen bis 20 000 EUR erhalten.

Der durchschnittliche Platzbedarf beträgt pro Stuhl einschließlich Tischanteil $0{,}80\,\text{m}^2$ und pro Barhocker $0{,}40\,\text{m}^2$, die Biertheke benötigt $25\,\text{m}^2$, für die Garderobe, Durchgänge u.a. braucht man $20\,\text{m}^2$.

Die Anzahl der Stühle soll mindestens das Dreizehnfache der Anzahl der Barhocker betragen. Aus optischen Gründen müssen aber an der Biertheke mindestens 6 Barhocker stehen.

Der geschätzte Monatsumsatz beträgt pro Stuhl 10 000 EUR, pro Barhocker 1 500 EUR.

Bei den zusätzlichen Stühlen und Tischen kann man davon ausgehen, dass sie die meiste Zeit in einem Abstellraum untergebracht sind und deswegen kein Platzbedarf für sie angesetzt werden muss bzw. durch sie auch keine regelmäßigen monatlichen Einnahmen entstehen.

Formulieren Sie ein lineares Programm, das den Monatsumsatz maximiert. Lösen Sie es mit einem Programmpaket Ihrer Wahl.

4 Punkte