Universität Bayreuth
Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik
Prof. Dr. Jörg Rambau
Dr. Sascha Kurz

Lineare Optimierung
WS 2005/06

11. Übungsblatt

Abgabe: 23.01.2006 – vor der Vorlesung

Bitte jeweils die ersten und die letzten beiden Aufgaben auf unterschiedlichen Blättern abgeben.

Aufgabe 41: Zeigen Sie dass die Matrix A aus der Musterlösung von Aufgabe 14 (maximaler Fluss) total unimodular ist. **4 Punkte**

Aufgabe 42: Bestimmen Sie die Optimallösungen des parametrischen Optimierungsproblems

$$\begin{array}{rrcrcl} \min & (-1+2\lambda)x_1 & + & (-3+\lambda)x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

für alle Parameterwerte $\lambda \geq 0$. **4 Punkte**

Aufgabe 43: Gegeben seien die LPs

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^T x & & \\ \text{(LP)} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{lrcl} \max & c^T x & & \\ (\text{LP}_\Delta) & Ax & \leq & b+\Delta \\ & x & \geq & 0. \end{array}$$

x^* sei eine nichtdegenerierte optimale Basislösung von (LP) mit Wert $z^* = c^T x^*$, π^* eine optimale Basislösung des zu (LP) dualen Programms. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass (LP_Δ) für alle $\Delta \in \mathbb{R}^m$ mit $-\epsilon < \Delta_i < \epsilon$, $i = 1, \ldots, m$, eine Optimallösung mit Wert

$$z^* + {\pi^*}^T \Delta$$

besitzt. **4 Punkte**

Aufgabe 44: Betrachten Sie eine vereinfachte Volkswirtschaft, die aus drei Sektoren I, II und einem Sektor III besteht, der die restliche Produktion der Volkswirtschaft subsummiert. Die Beziehungen zwischen den Sektoren einer Volkswirtschaft können mit Hilfe von sogenannten Input-Output-Tabellen analysiert werden. Tabelle 1 enthält die Daten einer derartigen Input-Output-Tabelle für die oben beschriebene Volkswirtschaft.

	Inputs*			Nach	Gesamt-
Outputs	I	II	III	-frage*	output*
I	10	15	25	15	65
II	5	4	18	23	50
III	22	8	77	18	125

* Alle Größen in Mrd Euro

Tabelle 1: Input-Output-Tabelle.

Die Zeilen der Tabelle geben jeweils an, wie die Produktion des betreffenden Sektors verwendet wurde, während die Spalten die vom jeweiligen Sektor benötigten Inputs zeigen. Aus der Zeile für Sektor I ist etwa abzulesen, dass die Gesamtproduktion dieses Sektors von 65 Mrd Euro wie folgt von der Volkswirtschaft verwendet wurde: 10 Mrd Euro flossen zurück in Sektor I (die Stahlwirtschaft benötigt z.B. selbst Stahl, um Stahlwerke zu bauen), je 15 bzw. 25 Mrd Euro wurden von den Sektoren II und III verwendet und 15 Mrd Euro dienten letztendlich zur Befriedigung der Endnachfrage nach den von Sektor I erzeugten Produkten. Die Nachfrage umfasst dabei Exporte, Ausgaben des Staates, Sachinvestitionen und Zahlungen an die Haushalte. Da der Nachfragesektor in diesem Modell *außerhalb der Volkswirtschaft steht*, wird ein solches Modell in der Volkswirtschaft als „offen" bezeichnet.

(Varianten, in denen Arbeit als vom Nachfragesektor produziertes Gut behandelt wird, werden als „geschlossene“ Modelle bezeichnet.) Analog ergibt sich aus der zu Sektor I gehörigen Spalte, dass dieser Sektor für seine Produktion 10 Mrd Euro der selbst produzierten Güter weiterverarbeitet hat und zusätzlich Güter für 5 Mrd Euro bzw. 22 Mrd Euro als Inputs von den Sektoren II und III benötigt hat. Die Spalte Gesamtoutput enthält die Summe der links von ihr stehenden Spalten, d.h. die Gesamtproduktion der drei Sektoren der Volkswirtschaft. (Addition der Einträge in der Spalte Gesamtoutput liefert den Gesamtoutput der Volkswirtschaft. Dieser ist jedoch nicht identisch mit dem Bruttosozialprodukt, da eine Input-Output-Tabelle alle wirtschaftlichen Aktivitäten einer Volkswirtschaft aufsummiert und produzierte Güter mehrfach gezählt werden können, während das Bruttosozialprodukt solche Mehrfachzählungen bereinigt.)

(a) Berechnen Sie unter Verwendung von Tabelle 1 eine Tabelle von sogenannten Input--Output-Koeffizienten a_{ij}, $i, j = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$, so dass der Koeffizient a_{ij} angibt, wieviel Input von Sektor i Sektor j benötigt, um eine Mark Output zu erwirtschaften.

(b) Leiten Sie unter der Annahme, dass die Input-Output-Koeffizienten konstant sind, ein (lineares) Gleichungssystem her, mit dem man für einen beliebig vorhergesagten Nachfragevektor die zur Befriedigung dieser Nachfrage benötigten Outputs der einzelnen Sektoren der Volkswirtschaft berechnen kann.

(c) Nehmen Sie an, dass Arbeit der einzige Produktionsfaktor ist, der nicht von der Volkswirtschaft selbst hergestellt werden kann, und dass Sektor j zur Produktion einer Mark Output $a_{0j}, j = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$ Einheiten Arbeit als Input benötigt. Stellen Sie ein lineares Programm (ein sogenanntes „Leontief-Modell“) auf, das die zur Befriedigung eines beliebigen Nachfragevektors benötigte Arbeit minimiert.

(d) Lösen Sie das LP für den Nachfragevektor $(15, 23, 18)$ und $a_{0\cdot}^T = (10, 7.5, 15)$.

4 Punkte