Universität Bayreuth
Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik
Prof. Dr. Jörg Rambau
Dr. Sascha Kurz

Lineare Optimierung
WS 2005/06

12. Übungsblatt

Abgabe: 30.01.2006 – vor der Vorlesung

Bitte jeweils die ersten und die letzten beiden Aufgaben auf unterschiedlichen Blättern abgeben.

Aufgabe 45: Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n),\ g(n) \geq 0$ für alle hinreichend großen n. Es gilt $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, falls c und n_0 existieren mit $f(n) \leq c \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0$. Und es gilt $f(n) = o(g(n))$ falls $\forall c > 0$ ein n_0 existiert mit $f(n) < c \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0$. Existieren $c_1, c_2 > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n),\ \forall n \geq n_0$, so schreibt man auch $f(n) = \Theta(g(n))$.

(a) Zeigen Sie: $\max\{f(n),\ g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$.

(b) Zeigen Sie: $n \log n = \mathcal{O}(n^{1+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$.

(c) Sei $f(n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass gilt:
$f(n) \cdot g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \iff \exists N \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}\ :\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N :\ g(n) \leq c$

(d) Gilt $2^{n+1} = \mathcal{O}(2^n)$?

(e) Gilt $2^{2n} = \mathcal{O}(2^n)$?

(f) Seien $p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ und $q(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ zwei reelle Polynome, wobei $a_m > 0$ und $b_k > 0$. Zeigen Sie, dass $p(n) = \Theta(q(n))$ gilt, falls $m = k$ ist und $p(n) = o(q(n))$ falls $m < k$.

4 Punkte

Aufgabe 46: Für $s \in \mathbb{N}$ und

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2^s & 2^s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sei $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$. Berechnen Sie (z.B. mit Maple oder einem C++-Programm) eine zulässige Lösung mit der Ellipsoid-Methode für $s = 1, 2, 3$. Verwenden Sie als Startellipsoid einen Kreis durch die Punkte: $(0, 0)$, $(5, 0)$ und $(0, 1)$. **4 Punkte**

Aufgabe 47: Das $3n+1$-Problem (auch bekannt als Collatz Problem, Syracuse Problem, Kakutani's Problem, Hasse's Algorithmus oder Ulam's Problem) ist die folgende iterative Prozedur auf den natürlichen Zahlen: die Zahl n wird abgebildet auf $\frac{n}{2}$ bzw. $3n+1$ abhängig davon, ob n gerade oder ungerade ist. Es wird vermutet, das jede Zahl nach endlich vielen Schritten im Zykel $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$ endet.

Mit $s(n)$ bezeichnen wir die Anzahl der Iterationen, die benötigt werden, um zum ersten Mal bei 1 zu landen, z.B. $s(3) = 7$, da $3 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 16 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$. Wir nennen weiter eine Zahl n *hartnäckig*, falls $s(n) > s(i),\ \forall i < n$ gilt. Die ersten *hartnäckigen Zahlen* sind somit $1, 2, 3, 6, \ldots$.

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Computerprogramms möglichst viele *hartnäckige Zahlen.*

4 Punkte + 1 Zusatzpunkt

Aufgabe 48: Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass der Gauß-Algorithmus ein polynomialer Algorithmus ist, wenn man ihn richtig umsetzt. Zur Festsetzung der Notation hier nochmal die Kurzform:
Sei $A^{(0)} = A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ die zu bearbeitende Matrix. Beim k-ten Schritt ist

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} B^{(k)} & C^{(k)} \\ 0 & D^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{m \times n},$$

wo B eine invertierbare obere $k \times k$ Dreiecksmatrix ist. Die die Einträge von $A^{(k)}$ sind rationale Zahlen und im Allgemeinen nicht ganzzahlig. Ohne Einschränkung (d.h. nach Zeilen- und Spaltenpermutationen) sei $d_{11}^{(k)} \neq 0$ das Pivotelement. Nun erhält man $A^{(k+1)}$ durch

$$d_{ij}^{(k+1)} = d_{ij}^{(k)} - \frac{d_{i1}^{(k)}}{d_{11}^{(k)}} d_{1j}^{(k)} \qquad \text{für } i = 2, \ldots m-k;\ j = 1, \ldots, n-k\,.$$

(a) Setzen Sie $K := \{1, \ldots, k\}$, $I := \{1, \ldots, k, k+i\}$ und $J := \{1, \ldots, k, k+j\}$. Zeigen Sie, dass

$$d_{ij}^{(k)} = \frac{\det(A_{IJ}^{(k)})}{\det(A_{KK}^{(k)})} \qquad \text{und damit} \quad d_{ij}^{(k)} = \frac{\det(A_{IJ})}{\det(A_{KK})}\,,$$

wobei A_{IJ} die durch Zeilenindizes aus I und Spaltenindizes aus J gegebene Teilmatrix von A ist.

(b) Setze

$$d_{ij}^{(k)} = \frac{p_{ij}^{(k)}}{q^{(k)}} \qquad \text{mit } q^{(k)} = \det B^{(k)} = \det A_{KK}^{(k)}$$

Zeigen Sie, dass

$$p_{ij}^{(k+1)} = \frac{p_{ij}^{(k)} p_{11}^{(k)} - p_{i1}^{(k)} p_{1j}^{(k)}}{q^{(k)}} \in \mathbb{Z} \qquad \text{und} \qquad q^{(k+1)} = p_{11}^{(k)}\,.$$

(c) Zeigen Sie nun, dass der Gauß-Algorithmus ein polynomiales Verfahren ist. (Dass die Anzahl der Operationen polynomial ist, muss nicht mehr gezeigt werden.)

4 Punkte