

### 13. Übungsblatt

Abgabe: 06.02.2006 – vor der Vorlesung

Bitte jeweils die ersten und die letzten beiden Aufgaben auf unterschiedlichen Blättern abgeben.

**Aufgabe 49: (Ein Klee-Minty-Beispiel)** Wir betrachten für  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$  und  $n \in \mathbb{N}$  das folgende lineare Programm, dessen zulässige Menge aus einem „deformierten Einheitswürfel“ besteht:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_n \\ \text{s. t.} \quad & \epsilon \leq x_1 \leq 1 \\ & \epsilon x_{i-1} \leq x_i \leq 1 - \epsilon x_{i-1} \quad i = 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

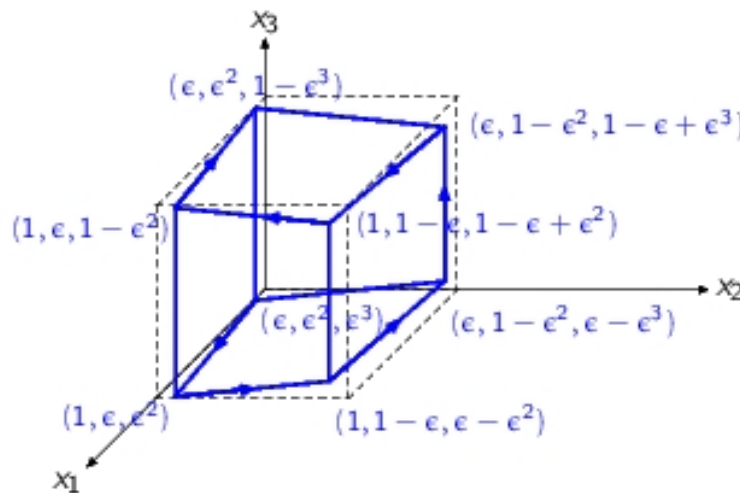


Abbildung 1: Klee-Minty-Beispiel für  $n = 3$ .

- Bringen Sie dieses lineare Programm in Standardform durch Einführung von Schlupfvariablen  $u_1$  für die Ungleichung  $x_1 \leq 1$ ,  $v_1$  für die Ungleichung  $\epsilon \leq x_1$  und von Schlupfvariablen  $u_i$  für die Ungleichungen  $x_i \leq 1 - \epsilon x_{i-1}$  und  $v_i$  für die Ungleichungen  $\epsilon x_{i-1} \leq x_i$ , wobei  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Fassen Sie  $x$ ,  $u$  und  $v$  in einem Vektor  $z$  zusammen.
- Zeigen Sie, dass jede zulässige Basis sämtliche  $x_i$  und für jedes  $i = 1, \dots, n$  entweder  $u_i$  oder  $v_i$  enthält. Gibt es degenerierte Basislösungen?
- Es ist bekannt, dass für bestimmte Pivotregeln das Simplexverfahren angewendet auf (P) *exponentiell viele Schritte* benötigt, um von der Basislösung der Ecke  $(\epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^n)$  zur Optimallösung zu gelangen. (Ein Klee-Minty-Beispiel mit exponentiell vielen Simplexschritten ist in Abbildung 1 dargestellt.)

Zeigen Sie, dass das Simplexverfahren angewendet auf (P) mit der Pivotregel des steilsten Anstiegs nur einen Pivotschritt benötigt, um von der Basislösung der Ecke  $(\epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^n)$  zur Optimallösung zu gelangen. (Die Pivotregel des steilsten Anstiegs wurde ursprünglich von Dantzig vorgeschlagen. Dabei wählt man als Pivotspalte die Spalte mit dem größten positiven Kostenkoeffizienten bei Maximierungsproblemen.)

4 Punkte

**Aufgabe 50:** Berechnen Sie explizit den zentralen Pfad des folgenden Problems:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + x_2 \\ & x_2 \leq 1 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4 Punkte

**Aufgabe 51:** Formulieren Sie die Barriere-Funktion für das folgende Problem:

$$\begin{aligned} \max \quad & x+y \\ & y \leq 2 \\ & 2x+y \leq 7 \\ & -\frac{1}{2}x+y \leq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Dann berechnen Sie (näherungsweise) die Lösung des Hilfsproblems mit der Barriere-Funktion für  $\mu = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}$ . Dies kann z.B. mit Maple geschehen. **4 Punkte**

**Aufgabe 52:** Betrachten Sie folgenden Artikel aus der *New York Times* vom 27. November 1979:

### **An Approach to Difficult Problems**

Mathematicians disagree as to the ultimate practical value of Leonid Khachiyan's new technique, but concur that in any case it is an important theoretical accomplishment.

Mr. Khachiyan's method is believed to offer an approach for the linear programming of computers to solve so called „travelling salesman“ problems. Such problems are among the most intractable in mathematics. They involve, for instance, finding the shortest route by which a salesman could visit a number of cities without his path touching the same city twice.

Each time a new city is added to the route, the problem becomes very much more complex. Very large numbers of variables must be calculated from large numbers of equations using a system of linear programming. At a certain point the complexity becomes so great that a computer would require billions of years to find a solution.

In the past, „travelling salesman“ problems, including the efficient scheduling of airline crews, or hospital nursing

staffs, have been solved on computers using the „simplex method“ invented by George B. Dantzig of Stanford University.

As a rule, the simplex method works well, but it offers no guarantee that after a certain number of computer steps it will always find an answer. Mr. Khachiyan's approach offers a way of telling right from the start whether or not a problem will be soluble in a given number of steps.

Two mathematicians conducting research at Stanford already have applied the Khachiyan method to develop a program for a pocket calculator, which has solved problems that would not have been possible with a pocket calculator using the simplex method.

Mathematically, the Khachiyan approach uses equations to create imaginary ellipsoids that encapsulate the answer, unlike the simplex method, in which the answer is represented by the intersection of the sides of polyhedrons. As the ellipsoids are made smaller and smaller, the answer is known with greater precision.

MALCOLM W. BROWNE

Entscheiden Sie für jede Aussage: ist sie (a) richtig, (b) falsch, (c) irreführend oder/und (d) äquivalent zu einer bekannten Vermutung, deren Lösung vermutlich dem Herrn Browne nicht bekannt war? **4 Punkte**