Universität Bayreuth
Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik
Prof. Dr. Jörg Rambau
Sascha Kurz

Lineare Optimierung
WS 2005/06

2. Übungsblatt

Abgabe: 07.11.2005 – vor der Vorlesung

Bitte jeweils die ersten und die letzen beiden Aufgaben auf unterschiedlichen Blättern abgeben.

Aufgabe 5: Es sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$.

(i) Bestimmen und zeichnen Sie für $S = \{(1,1),(1,-1)\} \subseteq \mathbb{K}^2$ die Mengen $\operatorname{lin}(S)$, $\operatorname{cone}(S)$, $\operatorname{aff}(S)$ und $\operatorname{conv}(S)$. Was ändert sich, wenn wir zu S den Nullpunkt $(0,0)$ hinzufügen?

(ii) Zeigen Sie, dass die lineare (konische, affine, konvexe) Hülle von S der kleinste lineare Raum (Kegel, affine Raum, konvexe Menge) ist, der S enthält.

4 Punkte

Aufgabe 6: Beschreiben Sie die folgenden Mengen mit Hilfe linearer Ungleichungen:

(i)
$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1,\ i = 1, \ldots, n\right\}$$

(ii)
$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq 1\right\}$$

4 Punkte

Aufgabe 7: Gegeben ist das lineare Programm

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{y} \\ & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a} \\ & B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Überführen Sie dieses Problem in die folgende Standardform:

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{z} \\ & F\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{f} \\ & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}\,, \end{aligned}$$

d.h. geben Sie $\boldsymbol{g}$, F, $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{z}$ in Abhängigkeit von den Daten des ersten Problems an. Die Optimalwerte sollen dann gleich sein und eine zulässige Lösung des einen Problems soll „einfach“ in eine zulässige Lösung des anderen Problem umrechenbar sein (falls es zulässige Lösungen gibt).

4 Punkte

Aufgabe 8: Wenden Sie Fourier-Motzkin-Elimination an, um festzustellen, ob das folgende Ungleichungssystem eine Lösung besitzt:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 &\leq 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 0 \\ -3x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 3x_4 &\leq 2 \\ -x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 &\leq -3 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 &\leq 2 \end{aligned}$$

D. h. führen Sie das Projektions-Verfahren sukzessive für das obige System mit den Richtungsvektoren e_1, e_2, e_3 und e_4 durch.

4 Punkte

Programmieraufgabe 1: (Abgabe bis: 10.12.05)
Programmieren Sie in 2–3er Teams den Simplex-Algorithmus nach Chvátal Kapitel 2 für Lineare Programmme der Form

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^t x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

in Java oder C/C++. Sie können der Einfachheit halber annehmen, dass $x = 0$ eine zulässige Lösung ist, also $b \geq 0$ gilt. Ein theoretisch mögliches *zykeln* des Algorithmus braucht auch nicht berücksichtigt zu werden.

Eingabeformat:

Ihr Programm soll Files im sogenannten `mps`-Format einlesen können (dieses Format wurde von IBM entwickelt, um lineare und ganzzahlige Programme in einer standardisierten Form darstellen zukönnen). Damit Sie sich ganz auf die Implementierung des Simplex-Algorithmus konzentrieren können, stellen wir Ihnen auf unserer Homepage `www.wm.uni-bayreuth.de`, zumindest für C/C++, Sourcecode zur Verfügung, der das Einlesen übernimmt.

Ausgabeformat:

Ihr Programm soll den optimalen Zielfunktionswert und die Belegung der Variablen inklusive der neu eingeführten Schlupfvariablen ausgeben.

Problembeispiele:

Testen Sie Ihr Programm anhand der Beispiele, die Sie auf der Homepage der Vorlesung (`http://www.wm.uni-bayreuth.de`) finden.
Mit Hilfe von ZIMPL (`http://www.zib.de/koch/zimpl/`) können Sie sich auch selbst neue Probleme basteln! Ihre Ergebnisse können Sie z.B. mit Hilfe von GLPK oder CPL überprüfen, siehe Homepage für eine kleine Liste frei verfugbarer LP-Löser.

Abgabe:

Die Abgabe besteht aus einer kurzen Präsentation des Programms am Lehrstuhl, in der Sie nachweisen, dass Ihr Programm die auf der Homepage der Vorlesung zur Verfügung gestellten Beispiele und ein weiteres nicht bereit gestelltes Beispiel richtig löst. Machen Sie hierfür bitte bis zum 10.12.05 einen Termin aus (`sascha.kurz@uni-bayreuth.de` oder über Sekretariat).