UNIVERSITÄT BAYREUTH
Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik
Prof. Dr. Jörg Rambau
Sascha Kurz

Lineare Optimierung
WS 2005/06

3. Übungsblatt

Abgabe: 14.11.2005 – vor der Vorlesung

Bitte jeweils die ersten und die letzen beiden Aufgaben auf unterschiedlichen Blättern abgeben.

Aufgabe 9: Berlin hatte zu Beginn des Jahres 1996 für den Bau des Tiergartentunnels in den folgenden sechs Jahren Bedarf an Finanzierungsmitteln, und zwar:

20 Mio. für das Jahr 1996,
17 Mio. für das Jahr 1997,
23 Mio. für das Jahr 1998,
24 Mio. für das Jahr 1999,
25 Mio. für das Jahr 2000,
21 Mio. für das Jahr 2001.

Man wollte sich die Mittel über langfristige Anleihen beschaffen. Anleihen konnten am 1. Januar jedes Jahres aufgenommen werden und mussten zum 31. Dezember 2001 zurückgezahlt werden, wobei die Verzinsung in der Rückzahlungssumme enthalten ist. Der Rückzahlungskurs beträgt für Anleihen

aus dem Jahr 1996: 150%,
aus dem Jahr 1997: 142%,
aus dem Jahr 1998: 132%,
aus dem Jahr 1999: 123%,
aus dem Jahr 2000: 115%,
aus dem Jahr 2001: 107%.

Die Stadtväter standen vor der Frage, wie die Volumina der sechs Anleihen aussehen sollten, da es ja möglicherweise günstig sein konnte, Anleihen auf Vorrat aufzunehmen. In jedem Jahr konnten die nicht benötigten Mittel zu jeweils 6,9% Verzinsung angelegt werden. Die Zinsen werden jeweils am Ende des Jahres ausbezahlt und können vollständig für die Deckung des Finanzierungsbedarfes verwendet werden.

(a) Formulieren Sie das geschilderte Problem als Lineares Programm.

(b) Wie sah ein optimaler Finanzierungsplan aus? (Verwenden Sie einen LP-Löser Ihrer Wahl.)

(c) Leider wurden im Januar 1996 nur 20 Mio. als langfristige Anleihe aufgenommen. Um wieviel wurde das gesamte Projekt dadurch teurer?

4 Punkte

Aufgabe 10: Beweisen Sie die folgenden Alternativsätze:

(a) $(\exists x : Ax = c) \ \dot\vee \ (\exists y : A^T y = 0,\, c^T y = 1)$

(b) $(\exists x : Ax \leq c,\, Ax \neq c)$
$\dot\vee \ \left[\exists y : (A^T y = 0,\, c^T y = -1,\, y \geq 0) \vee (A^T y = 0,\, c^T y \leq 0,\, y > 0)\right]$

(c) $(\exists x : Ax > 0,\, Cx \geq 0,\, Dx = 0)$
$\dot\vee \ (\exists u, v, w : u, v \geq 0,\, u \neq 0,\, A^T u + C^T v + D^T w = 0)$

(d) $(\exists x : Ax \leq 0,\, x \neq 0) \ \dot\vee \ (\forall c : \exists y : y^T A = c, y \geq 0)$

4 Punkte

Aufgabe 11: Betrachten Sie die beiden folgenden Probleme:

- Finden Sie zu einem gegebenen LP eine zulässige Lösung oder stellen Sie fest, dass es keine gibt.
- Finden Sie zu einem gegebenen LP eine optimale Lösung oder stellen Sie fest, dass es keine gibt.

Zeigen Sie, dass die beiden Probleme gleich schwer sind, d.h.: kennt man einen (beliebigen) Algorithmus, der das eine löst, so kann man damit auch das andere lösen. **4 Punkte**

Aufgabe 12: Was ist an der folgenden Argumentation falsch?

Es gilt durch abwechselnde Anwendung von Dualität bzw. der Abschätzung $\min\{f(x) : x \in X\} \leq \max\{f(x) : x \in X\}$:

$$\begin{aligned}
\max\{\, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \;:\; A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,\} &\leq \min\{\, \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \;:\; \boldsymbol{y}^T A \geq \boldsymbol{c}^T,\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\,\} \\
&\leq \max\{\, \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \;:\; \boldsymbol{y}^T A \geq \boldsymbol{c}^T,\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\,\} \\
&\leq \min\{\, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \;:\; A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}\,\} \\
&\leq \max\{\, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \;:\; A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}\,\} \\
&\leq \min\{\, \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \;:\; \boldsymbol{y}^T A \leq \boldsymbol{c}^T,\ \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{0}\,\} \\
&\leq \max\{\, \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \;:\; \boldsymbol{y}^T A \leq \boldsymbol{c}^T,\ \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{0}\,\} \\
&\leq \min\{\, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \;:\; A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,\} \\
&\leq \max\{\, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \;:\; A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,\}\,.
\end{aligned}$$

Also gilt überall Gleichheit und es macht keinen Unterschied, ob man maximiert bzw. minimiert.

Zeigen Sie explizit, dass die obige Argumentation für beliebige Parameter A, b und c immer falsch ist, falls $c^t x$ nicht konstant auf $\{x \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ ist. **4 Punkte**