UNIVERSITÄT BAYREUTH
Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik
Prof. Dr. Jörg Rambau
Sascha Kurz

Lineare Optimierung
WS 2005/06

4. Übungsblatt

Abgabe: 21.11.2005 – vor der Vorlesung

Bitte jeweils die ersten und die letzen beiden Aufgaben auf unterschiedlichen Blättern abgeben.

Aufgabe 13: Formulieren und beweisen Sie den Satz vom starken komplementären Schlupf für das folgende Paar dualer linearer Programme:

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^T x + d^T y & & \\ \text{s.t.} & Ax + By & \leq & a \\ & Cx + Dy & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{lrcl} \min & u^T a + v^T b & & \\ \text{s.t.} & u^T A + v^T C & \geq & c^T \\ & u^T B + v^T D & = & d^T \\ & u & \geq & 0 \end{array}$$

4 Punkte

Aufgabe 14: Sei $D = (V, A)$ ein Digraph und $s, t \in V$, $s \neq t$. Es sei außerdem eine Funktion $c : A \to \mathbb{R}^+$ gegeben, die jeder Kante eine nicht-negative Kapazität zuweist. Ein *Fluss* für (D, c) ist eine Abbildung $f : A \to \mathbb{R}^+$, so dass

$$0 \leq f(a) \leq c(a) \quad \text{für alle } a \in A \quad \text{und}$$

$$\sum_{(u,v)\in A} f(u,v) = \sum_{(v,u)\in A} f(v,u) \quad \text{für alle } v \in V \setminus \{s,t\}\,,$$

wobei $f(u, v) := f(a)$ für $a = (u, v)$ geschrieben wird. Die zweite Gleichung sagt, dass das was in einen Knoten v hineinfließt auch wieder herausfließt (außer für s und t). Ziel ist es nun einen maximalen Fluss zu finden, d.h. einen Fluss, der den *Flusswert*

$$\sum_{(s,u)\in A} f(s,u) - \sum_{(u,s)\in A} f(u,s)$$

maximiert. Formuliere dies als Lineares Programm und bestimme das duale Programm dazu.

4 Punkte

Aufgabe 15: Ist der Punkt $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine Optimallösung des folgenden LPs?

$$\begin{array}{lrrrrrl} \max & 7x_1 & + 6x_2 & + 5x_3 & - 2x_4 & + 3x_5 & \\ \text{s.t.} & x_1 & + 3x_2 & + 5x_3 & - 2x_4 & + 2x_5 & \leq 4 \\ & 4x_1 & + 2x_2 & - 2x_3 & + x_4 & + x_5 & \leq 3 \\ & 2x_1 & + 4x_2 & + 4x_3 & - 2x_4 & + 5x_5 & \leq 5 \\ & 3x_1 & + x_2 & + 2x_3 & - x_4 & - 2x_5 & \leq 1 \\ & & x_1, & x_2, & x_3, x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Beantworten Sie die Frage mit Hilfe der Bedingungen des komplementären Schlupfes.

4 Punkte

Aufgabe 16: Zeigen Sie, dass für S, $S_i \subseteq \mathbb{K}^n$, $i = 1, \ldots, k$ gilt:

(a) $S_i \subseteq S_j \Rightarrow S_j^o \subseteq S_i^o$,

(b) $S \subseteq S^{oo}$,

(c) $(\bigcup_{i=1}^{k} S_i)^o = \bigcap_{i=1}^{k} S_i^o$,

(d) $S^o = \text{cone}(S^o) = (\text{cone}(S))^o$,

(e) $S = \text{lin}(S) \Rightarrow S^o = S^\perp$ (Gilt die Umkehrung?).

(f) Sind die Behauptungen a) – d) auch wahr, wenn man "^{o}" durch "$^\perp$" ersetzt?

(g) Für welche Mengen $S \subseteq \mathbb{K}^n$ gilt $S^o = S^{ooo}$?

(h) Für welche Mengen $S \subseteq \mathbb{K}^n$ gilt $S = S^o$?

4 Punkte