Universität Bayreuth
Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik
Prof. Dr. Jörg Rambau
Sascha Kurz

Lineare Optimierung
WS 2005/06

6. Übungsblatt

Abgabe: 05.12.2005 – vor der Vorlesung
Bitte jeweils die ersten und die letzten beiden Aufgaben auf unterschiedlichen Blättern abgeben.

Aufgabe 21: In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass sich jedes Polyeder P darstellen läßt als $P(A, b)$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$, aber auch als $P = \operatorname{conv}(V) + \operatorname{cone}(E)$ mit endlichen Teilmengen $V, E \subseteq \mathbb{R}^n$.
Wir nennen die erste Darstellung $\mathcal{H}$-Darstellung von P (da sie mit Hyperebenen arbeitet), die zweite $\mathcal{V}$-Darstellung von P (da sie u. a. mit Ecken (engl. *vertex*, *vertices* arbeitet).

(a) Finden Sie (z.B. graphisch) für folgendes in $\mathcal{H}$-Darstellung gegebene Polyeder $P(A, b)$ eine $\mathcal{V}$-Darstellung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Finden Sie (z.B. graphisch) für folgendes in $\mathcal{V}$-Darstellung gegebene Polyeder P eine $\mathcal{H}$-Darstellung:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

4 Punkte

Aufgabe 22: Sei $P = P(A, b)$ ein Polytop mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) P hat endlich viele Ecken. (Geben Sie eine obere Schranke für die Anzahl der Ecken in Abhängigkeit von m und n an.)

(b) x ist Ecke von P genau dann, wenn für alle $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt: $x + z \notin P$ oder $x - z \notin P$.

4 Punkte

Aufgabe 23: Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder. Dann heisst $P^* = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} \leq 1 \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in P\}$ das *polare* Polyeder zu P. Zeigen Sie:

(a) $(P^*)^* = P \iff \mathbf{0} \in P$.

(b) Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polytop mit $\dim(P) = n$ und sei 0 innerer Punkt von P. Dann gilt:

$$\boldsymbol{v} \text{ ist Ecke von } P \iff \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{y} \leq 1 \text{ ist Facette von } P^*$$
$$\boldsymbol{u} \text{ ist Ecke von } P^* \iff \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x} \leq 1 \text{ ist Facette von } P$$

4 Punkte

Aufgabe 24: Ein Papierfabrikant stellt Papierrollen mit einer Standardbreite von 105 cm und einer Länge von L cm her. Die Kunden verlangen jedoch Rollen mit geringerer Breite (aber derselben Länge L). Es liegen folgende Aufträge vor:

100 Rollen mit Breite 25 cm,
125 Rollen mit Breite 30 cm,
80 Rollen mit Breite 35 cm.

Zur Erledigung der Aufträge werden Standardrollen zerschnitten. Z. B. kann der Fabrikant aus einer Papierrolle mit Standardbreite zwei Rollen von je 35 cm Breite und eine Rolle von 30 cm Breite schneiden. Das ergibt einen Schnittverlust von 5cm. Ziel des Fabrikanten ist die Minimierung der Schnittverluste für die vorliegenden Aufträge. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm und lösen Sie es mit einem LP-Löser Ihrer Wahl.

4 Punkte