Universität Bayreuth
Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik
Prof. Dr. Jörg Rambau
Dr. Sascha Kurz

Lineare Optimierung
WS 2005/06

7. Übungsblatt

Abgabe: 12.12.2005 – vor der Vorlesung

Bitte jeweils die ersten und die letzten beiden Aufgaben auf unterschiedlichen Blättern abgeben.

Aufgabe 25: Das Polyeder $P(A, b)$ sei gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie $P(A, b)$ graphisch dar und bestimmen Sie alle Ecken.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Satz (7.16) alle Kandidaten für Ecken und ordnen Sie diese den Ecken zu. (*Tipp:* Eine Ecke ist eine 0-dimensionale Seitenfläche.)

(c) Bestimmen Sie eine irredundante Darstellung $P'(A', b')$ von $P(A, b)$.

(d) Führen Sie Aufgabenteil (b) für die irredundante Darstelllung aus.

4 Punkte

Aufgabe 26: Definieren Sie für $1 \le k \le d$, den *Hypersimplex* durch

$$\Delta_d(k) := \{\boldsymbol{x} \in [0,1]^d \ : \ k - 1 \le x_1 + x_2 + \cdots + x_d \le k\}.$$

($\Delta_d(1)$ ist ein d-dimensionaler Simplex.)

Wieviele Ecken und Facetten haben $\Delta_3(2)$ bzw. $\Delta_4(2)$? **4 Punkte**

Aufgabe 27: Ein Düngemittelhersteller baut drei Rohstoffe 1,2 und 3 ab, aus denen er zwei Sorten von Dünger produziert: ein Dünger hat einen hohen Phosphatanteil (`H`), der andere einen niedrigen (`L`). Tabelle 1 gibt einen Überblick über die zur Produktion einer Einheit von `H` und `L` benötigten Mengen an Rohstoffen, die pro Monat verfügbaren Mengen an den drei Rohstoffen und den Gewinn, der durch den Verkauf einer Einheit von Dünger `H` und `L` erzielt wird.

Rohstoff	Rohstoffbedarf/t Dünger H	Rohstoffbedarf/t Dünger L	maximal verfügbare Menge Rohstoffe/t/Monat
1	2	1	1500
2	1	1	1200
3	1	0	500
Gewinn/t	15	10	max

Tabelle 1: Düngemittelproduktion.

(a) Formulieren Sie das Problem des Düngemittelherstellers, den Gewinn aus der Düngerproduktion zu maximieren, als lineares Programm.

(b) Bestimmen Sie das zu obigem Programm duale lineare Programm.

(c) Interpretieren Sie das duale Programm ökonomisch als ein Problem der Kostenmimierung eines Waschmittelherstellers, der den Düngemittelhersteller dazu bewegen will, seine Rohstoffe an ihn zur Produktion von Waschmittel zu verkaufen.

(d) Lösen Sie das primale und das duale Programm mit Hilfe eines LP-Lösers Ihrer Wahl. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse ökonomisch.

(Den Zusatzpunkt gibt es für die ökonomische Interpretation.)

4 Punkte + 1 Zusatzpunkt

Aufgabe 28: Eine Matrix A heißt *total unimodular*, wenn die Determinante jeder quadratischen Untermatrix von A einen der Werte $-1, 0, 1$ hat.

Seien $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{\ell}$ und $\boldsymbol{u}$ ganzzahlige Vektoren und A eine total unimodulare Matrix. Beweisen Sie:

Die Systeme $\{\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ und $\{\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{\ell} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}\}$ haben nur Basislösungen, die ganzzahlig sind.

Tipp: Zeigen Sie: wenn A total unimodular ist, dann ist auch $[A\ \ I]$ total unimodular.

4 Punkte