

9. Übungsblatt

Abgabe: 09.01.2006 – vor der Vorlesung

Bitte jeweils die ersten und die letzten beiden Aufgaben auf unterschiedlichen Blättern abgeben.

Aufgabe 33: Lösen Sie das folgende Lineare Programm mit dem revidierten Simplexalgorithmus (Phase I und II).

$$\begin{array}{rcl}
 \max & -x_1 & - 2x_2 & & - x_4 & - x_5 & + 5x_6 \\
 \text{s. t.} & 6x_1 & - 2x_2 & + x_3 & - x_4 & + x_5 & + 2x_6 = 4 \\
 & 2x_1 & - \frac{1}{3}x_2 & - x_3 & + x_4 & + \frac{1}{2}x_5 & = 3 \\
 & 3x_1 & - x_2 & + 2x_3 & + 4x_4 & + \frac{1}{2}x_5 & + x_6 = 2 \\
 & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.
 \end{array}$$

4 Punkte

Aufgabe 34: Um eine zulässige Startbasis für das LP

$$\begin{array}{rcl}
 \max & c^T x & \\
 \text{s. t.} & Ax & \leq b \\
 & x & \geq 0
 \end{array} \tag{LP}$$

zu erhalten (b ist nicht notwendig ≥ 0), betrachten wir alternativ zur Vorlesung das LP

$$\begin{array}{rcl}
 \max & z & \\
 \text{s. t.} & Ax & - bz \leq 0 \\
 & & z \leq 1 \\
 & & x, z \geq 0.
 \end{array} \tag{LP'}$$

(LP') wird mit dem Simplexalgorithmus gelöst. Wie kann man aus einer optimalen Basis von (LP') eine zulässige Basis für (LP) gewinnen oder entscheiden, dass (LP) unzulässig ist? Geben Sie ein Verfahren an, begründen Sie die Korrektheit und wenden Sie es auf die beiden folgenden LPs an:

$$\begin{array}{rcl}
 \max & x_1 & + x_2 & & \max & x_1 & + x_2 \\
 \text{s. t.} & 2x_1 & - x_2 & \leq -1 & \text{s. t.} & 2x_1 & - x_2 \leq -1 \\
 & x_1 & - 2x_2 & \leq -6 & & -x_1 & + 2x_2 \leq 0 \\
 & & & x_1, x_2 \geq 0, & & & x_1, x_2 \geq 0.
 \end{array}$$

4 Punkte

Aufgabe 35: Ein Whisky-Importeur unterhält zwar einen unbegrenzten Markt für seine Ware, aber durch Importbeschränkungen werden seine monatlichen Einkaufsmengen folgendermaßen begrenzt:

<i>Sir Roses</i>	höchstens 2000 Flaschen zu 35 Euro,
<i>Highland Wind</i>	höchstens 2500 Flaschen zu 25 Euro,
<i>Old Frenzy</i>	höchstens 1200 Flaschen zu 20 Euro.

Daraus stellt er drei Mischungen A, B und C her, die er zu 34 Euro, 28.50 Euro bzw. 22.50 Euro pro Flasche verkauft. Die Zusammensetzung der Mischungen ist:

- A wenigstens 60% *Sir Roses*
höchstens 20% *Old Frenzy*
- B wenigstens 15% *Sir Roses*
höchstens 60% *Old Frenzy*
- C höchstens 50% *Old Frenzy*

Wie sollten die Mischungen aussehen und wieviel sollte von jeder Mischung hergestellt werden, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

- (a) Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.
- (b) Lösen Sie das Problem mit einem LP-Löser Ihrer Wahl.
- (c) Konstruieren Sie aus der Lösung des LPs eine möglichst optimale Lösung, die zusätzlich berücksichtigt, dass der Whisky nur flaschenweise ge- und verkauft werden kann.

4 Punkte

Aufgabe 36: Spieler A und B wählen jeweils eine Zahl aus der Menge $\{1, 2, \dots, 1000\}$. Unterscheiden sich die gewählten Zahlen um mindestens zwei, so gewinnt der Spieler mit der niedrigeren Zahl. Unterscheiden sich die Zahlen um genau eins, so gewinnt der Spieler mit der höheren Zahl. Wählen beide dieselbe Zahl, so ist das Spiel unentschieden. Finden Sie eine optimale Strategie für das Spiel. (Tipp: Man muss nicht immer die selbe Zahl wählen, sondern kann die Zahl auch zufällig bestimmen indem man den 1000 Möglichkeiten Wahrscheinlichkeiten zuordnet. Dies nennt man dann eine *gemischt Strategie*.) **4 Punkte**

Programmieraufgabe 2: (Abgabe bis: 01.02.06)

Implementieren Sie den revidierten Simplexalgorithmus für allgemeine lineare Programme der Form

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x + d^T y \\ \text{s. t.} \quad & Ax + By \leq a \\ & Cx + Dy = b \\ & 0 \leq x \leq u. \end{aligned}$$

In einem ersten Schritt überführen Sie dazu das obige lineare Programm in ein Programm in Standardform.

Anschliessend lösen Sie es mit dem revidierten Simplexalgorithmus aus der Vorlesung. Bauen Sie eine Einstellmöglichkeit in ihr Programm ein, wie oft die Matrix A_B^{-1} durch Inversion neu berechnet werden soll. Spielen Sie ein wenig damit herum und beobachten Sie die numerischen Auswirkungen.

Eingabeformat:

Ihr Programm soll Files im sogenannten mps-Format einlesen können. Damit Sie sich ganz auf die Implementierung des Simplex-Algorithmus konzentrieren können, stellen wir Ihnen auf unserer Homepage www.wm.uni-bayreuth.de, zumindest für C/C++ (evtl. auch für Java und Python), Sourcecode zur Verfügung, der das Einlesen übernimmt.

Ausgabeformat:

Das Programm soll zumindest den Namen des Problems sowie den Zielfunktionswert der Optimallösung ausgeben.

Problembispiele:

Testen Sie Ihr Programm anhand der Beispiele: AFIRO, FIT1D, FIT2D, KB2, SC50A, SC50B, TRANSPORTPROBLEM_100_200, TRANSPORTPROBLEM_150_150, UNFOERMIG. Erhältlich auf der Homepage der Vorlesung (<http://www.wm.uni-bayreuth.de>).

Wettbewerb:

Versuchen Sie die Laufzeit Ihres Programms anhand der Beispiele zu optimieren. Wir verteilen Zusatzpunkte für besonders schnelle Implementierungen. (Bei der ersten Programmieraufgabe waren die Java-Implementierungen knapp halb so schnell wie die C++-Implementierungen. Python hat sich noch ein klein wenig schlechter geschlagen. Bei der zweiten Programmieraufgabe haben sie aber ein paar algorithmische Freiheiten, mit denen Sie die Laufzeitnachteile bestimmter Programmiersprachen eventuell ausgleichen können.)

Abgabe:

Die Abgabe besteht aus einer kurzen Präsentation des Programms am Lehrstuhl, in der Sie nachweisen, dass Ihr Programm die auf der Homepage der Vorlesung zur Verfügung gestellten Beispiele und ein weiteres nicht bereit gestelltes Beispiel richtig löst. Machen Sie hierfür bitte bis zum 01.02.06 einen Termin aus (sascha.kurz@uni-bayreuth.de oder über Sekretariat).

Frohe Weihnachten !