Universität Bayreuth
Fakultät für Mathematik und Physik

Funktionalanalysis II

Prof. Dr. C. G. Simader

Sommersemester 2002

Erstellt aus einer Mitschrift von Stephan Weyers. Getippt von Sonja Ertel,
Martin Kreis, Sascha Kurz, Thomas Lehmann, Frank Liczba, Armin Rund und Stefan Tuffner.

Dieses Skript ist viel mehr eine Vorlesungsmitschrift als ein Skript, die wir uns, wie bereits auf der Titelseite angegeben, auch noch ausgeliehen haben. Zum Einfügen von Bildern und Grafiken waren wir einfach zu faul. Auch sind die Simadersche Beweise recht formal, und kleinere Erklärungen könnten durchaus hilfreich sein. Doch wir werden, mangels Motivation, derartige Verbesserungen nicht mehr vornehmen.

Falls sich ein edler Helfer finden sollte, der dies Skript verbessern will, so möge er doch bitte eine Email an die Fachschaft, btfm01@saftsack.fs.uni-bayreuth.de, oder an Sascha, KurzTEF@web.de, schreiben und er erhält die LaTeX-Quellen dieses Skripts.

Wir hoffen, dass noch Weitere die Mühen auf sich nehmen, um Skripte zu erstellen, und es vor allem auch der Fachschaft zur Verfügung stellen, damit auch nachfolgende Studenten etwas davon haben.

Besonderer Dank an Stephan für die Hefte, Prof. Simader für die Vorlesung, Donald E. Knuth für TeX, Leslie Lamport für LaTeX,...

Bayreuth, den 30.12.2004
Armin, Frank, Martin, Sascha, Sonja, Stefan, Thomas

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis iii

1 Abgeschlossene Operatoren 1

2 Hermitesche Operatoren 17

3 Die Resolvente selbstadjungierter Operatoren 27

4 Ein Störungssatz 35

5 Anwendung: Schrödinger-Operatoren 39

6 Die Spektralschar 49

7 Die Stieltjessche Umkehrformel 61

8 Eine Integraldarstellung für die Resolvente eines selbstadjungierten Operators 81

9 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren 95

10 Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators 103

11 Funktionen eines selbstadjungierten Operators 123

12 Einparametrige unitäre Gruppen 135

Symbolverzeichnis

$T\big\vert_D$	Einschränkung von T auf D , 1
$L^2(\Omega)$	Raum der quadratintegrabelen Funktionen über Ω, 2
$C_0^\infty(\Omega)$	$C^\infty(\Omega)$ mit kompaktem Träger, 2
$\langle f, g\rangle$	Skalarprodukt von f und g, 2
$\overline{T}$	Abschließung von T, 3
$\Vert f\Vert$	Norm von f, 4
$N(T)$	Nullraum von T, 8
$R(T)$	Bildraum von T, 8
$R^\perp$	Orthogonalraum zu R, 11
$\mathring{I}$	Inneres von I, 18
$\Im\, z$	Imaginärteil von z, 20
$\Re\, z$	Realteil von z, 20
$\overline{A}$	Abschluss von A, 23
$\varrho(T)$	Resolventenmenge von T, 27
$\sigma(T)$	Spektrum von T, 27
$dist(z, A)$	Abstand von z zu A, 32
$B_r(x_0)$	Kugel mit Radius r um x_0, 41

$\sup\limits_{x\in A} M(x)$	Supremum von M über A, 41
$\mathrm{diam}(A)$	Durchmesser von A, 41
$\mathrm{supp}\,\mathrm{u(x)}$	Träger von u , 41
$\max(a,b)$	Maximum von a, b, 41
$f(x)\vert_{x=b}^{x=a}$	f in den Grenzen a,b, 42
$\min(a,b)$	Minimum von a, b, 43
$\inf A$	Infimum von A, 55
$dim\,M$	Dimension von M, 104

1. Abgeschlossene Operatoren

Im Folgenden seien H, H_1, H_2 stets Hilberträume über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$.
Ist $D(T) \subset H$ dicht, $T : D(T) \to H_1$, so heißt T dicht definiert.

DEFINITION 1.1

Sei $D(T) \subset H$ Untervektorraum, $T : D(T) \to H_1$ linear.
*T heißt **abgeschlossen** , wenn gilt:*

$$(f_n) \subset D(T),\ f_n \to f \in H,\ Tf_n \to g \in H_1 \Longrightarrow f \in D(T),\ Tf = g$$

DEFINITION 1.2

Sei $D(T) \subset H$ Untervektorraum, $T : D(T) \to H_1$ linear.
*T heißt **abschließbar**, wenn gilt:*

$$(f_n) \subset D(T),\ f_n \to 0,\ Tf_n \to g \in H_1 \Longrightarrow g = 0$$

BEZEICHNUNG

Seien $D(T_1) \subset D(T_2) \subset H$ Untervektorräume.
$T_i : D(T_i) \to H_1$ linear mit $T_2\Big|_{D(T_1)} = T_1$.
Schreibe dann: $T_1 \subset T_2$

BEISPIEL 1.3
Sei $\Omega :=]-1,1[$, $H = L^2(\Omega)$, $\mathbb{K} := \mathbb{R}$.

a) beschränkte lineare Operatoren mit $D(T) = H$:
Integraloperatoren mit "gutartigen" Kernen, z.B. Hilber-Schmidt;

b) unbeschränkte Operatoren:
$D(T) := C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$.
$(Tu)(x) := u'(x),\ u \in C_0^\infty(\Omega),\ x \in \Omega$;

(i) Linearität klar.

(ii) T unbeschränkt:

Sei $j \in C_0^\infty,\ j \geq 0$ und $\int\limits_{-1}^{1} j^2(x)\,dx = 1$ und $j(x) = 0$ für $|x| > \frac{1}{2}$ (existiert, Glättungskern).
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(x) := \sqrt{n}j(nx)$.
$\Longrightarrow f_n(x) = 0$ für $n|x| \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow |x| \geq \frac{1}{2n}$;

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_{L^2}^2 &= \int\limits_{-1}^{+1} f_n(x)^2\,dx = \int\limits_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} f_n(x)^2\,dx \overset{x=\frac{y}{n}}{=} \frac{1}{n}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} nj(y)^2\,dy = 1 \\
f_n'(x) &= n^{\frac{3}{2}}(j')(nx) \\
\int\limits_{-1}^{1} f_n'(x)^2\,dx &= n^3 \int\limits_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} (j')^2(nx)\,dx \overset{x=\frac{y}{n}}{=} n^2 \underbrace{\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (j')^2(y)\,dy}_{=:d>0}
\end{aligned}$$

Also $\|f_n\| = 1,\ \|Tf_n\| = n\sqrt{d}$;

(iii) T abschließbar:

Sei $(f_n) \subset C_0^\infty(\Omega),\ f_n \to 0,\ f_n' \to g \in L^2(\Omega)$.
Sei $\Phi \in C_0^\infty$ beliebig.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \langle g, \Phi\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle f_n', \Phi\rangle = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-1}^{1} f_n'(x)\Phi(x)\,dx = -\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-1}^{1} f_n(x)\Phi'(x)\,dx = \\
&= -\lim_{n\to\infty}\langle f_n, \Phi'\rangle \overset{f_n\to 0}{=} 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g \in L^2(\Omega) &\Longrightarrow \exists(\Phi_k) \subset C_0^\infty(\Omega):\ \Phi_k \to g \\
&\Longrightarrow \langle g, g\rangle = \lim_{k\to\infty}\underbrace{\langle g, \Phi_k\rangle}_{=0} = 0 \\
&\Longrightarrow g = 0
\end{aligned}$$

$\diamond$

SATZ 1.4

Sei $D(T) \subset H, T : D(T) \to H_1$ linear.

a) Ist $T \subset T_1, T_1$ abgeschlossen, so ist T abschließbar.

b) Sei T abschließbar.
Dann gibt es genau ein $\overline{T}$ mit $\overline{T}$ abgeschlossen, $T \subset \overline{T}$, derart daß für jedes abgeschlossene S mit $T \subset S$ gilt: $\overline{T} \subset S$.
*Wir nennen $\overline{T}$ **Abschließung** von T.*

BEWEIS.

a) Sei $(f_n) \subset D(T),\ f_n \to 0,\ Tf_n \to g \in H_1$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow && (f_n) \subset D(T_1),\ f_n \to 0,\ T_1 f_n \to g \in H_1 \\ &\underset{T_1 \text{ abgeschlossen}}{\Longrightarrow} && g = T_1 0 = 0 \end{aligned}$$

b) Sei nun T abschließbar.

i) Eindeutigkeit von $\overline{T}$: klar.

ii) Existenz:

Setze $D(\overline{T}) := \{f \in H : \exists (f_n) \subset D(T) \text{ mit } f_n \to f \text{ und } (Tf_n) \text{ Cauchy-Folge}\}$

$D(\overline{T})$ UVR klar.

Sei $f \in D(\overline{T}),\ (f_n),\ (h_n) \subset D(T)$ mit $f_n \to f,\ h_n \to f$,
$(Tf_n),\ (Th_n)$ Cauchy-Folgen

$\Longrightarrow \exists g_1 = \lim\limits_{n\to\infty} Tf_n,\ g_2 = \lim\limits_{n\to\infty} Th_n;$

$(f_n - h_n) \in D(T),\ f_n - h_n \to 0$
$T(f_n - h_n) = Tf_n - Th_n \to g_1 - g_2$
$\overset{T \text{ abschließbar}}{\Longrightarrow} \quad g_1 - g_2 = 0.$

Für $f \in D(\overline{T})$ setze nun $\overline{T}f := \lim\limits_{n\to\infty} Tf_n$

$\Longrightarrow \overline{T}(\lambda f + \mu g) = \lim\limits_{n\to\infty} T(\lambda f_n + \mu g_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} Tf_n + \mu \lim\limits_{n\to\infty} Tg_n = \lambda \overline{T} f + \mu \overline{T} g;$

iii) $T \subset \overline{T}$ klar.

iv) Zeige: $\overline{T}$ abgeschlossen.

Sei $(h_n) \subset D(\overline{T}),\ h_n \to h \in H,\ \overline{T}h_n \to g \in H;$

Zu h_n $\exists f_n \in D(T):\ \|h_n - f_n\| \leq \frac{1}{n}$,
$\|\overline{T}h_n - Tf_n\| \leq \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow && (f_n) \subset D(T),\ f_n \to h,\ Tf_n \to g \\ &\underset{\text{Def. } \overline{T}}{\overset{\text{Def.} D(\overline{T})}{\Longrightarrow}} && h \in D(\overline{T}) \text{ und } \overline{T}h = \lim_{n\to\infty} Tf_n = g \end{aligned}$$

v) Minimalität:

Sei $T \subset S$, S abgeschlossen.
Sei $f \in D(\overline{T})$.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow && \exists (f_n) \subset D(T),\ f_n \to f,\ Tf_n \to \overline{T}f \\ &\Longrightarrow && (f_n) \subset D(S),\ f_n \to f,\ Sf_n \to \overline{T}f \\ &\overset{S \text{ abgeschlossen}}{\Longrightarrow} && f \in D(S) \text{ und } Sf = \overline{T}f \end{aligned}$$

Also $\overline{T} \subset S$.

□

BEISPIEL 1.5
siehe vorheriges Beispiel b).
Es gilt:

$$D(\overline{T}) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \exists (f_n) \subset C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \|f_n - f\|_{L^2} \to 0 \text{ und } (f_n') \text{ ist Cauchy-Folge in } L^2(\Omega) \right\}$$

Dann gilt $D(\overline{T}) = H_0^{1,2}(\Omega)$ (Sobolevräume, siehe Funktionalanalysis I, Blatt3).

Ist nämlich $f \in D(\overline{T})$
$\Longrightarrow f_n' \to g \in L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$

Beachte

$$\|f_n - f\|_{H^{1,2}(\Omega)} = \sqrt{\|f_n - f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f_n' - g\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

◇

SATZ 1.6

Sei $H_1 \oplus H_2 := \{(f,g) :\ f \in H_1, g \in H_2\}$.

Setze $\langle (f,g),(u,v)\rangle_{H_1\oplus H_2} := \langle f,u\rangle_{H_1} + \langle g,v\rangle_{H_2}$.

Dann ist $(H_1 \oplus H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1\oplus H_2})$ *Hilbertraum.*

Die Abbildungen

$$J_1 : H_1 \to H_1 \oplus H_2, \quad J_1(f) := (f,0)$$

$$J_2 : H_2 \to H_1 \oplus H_2, \quad J_2(g) := (0,g)$$

sind isometrische Monomorphismen.

BEWEIS.
Das meiste ist klar.
Beachte: $\|(f,g)\|_{H_1\oplus H_2} = \sqrt{\|f\|_{H_1}^2 + \|g\|_{H_2}^2}$.

$$\begin{aligned}
f_n \to f, g_n \to g \quad &\iff \quad \sqrt{||f_n - f||_{H_1}^2 + ||g_n - g||_{H_2}^2} \to 0 \\
&\iff \quad (f_n, g_n) \to (f,g) \\
(f_n), (g_n) \text{ Cauchy-Folgen} \quad &\iff \quad \sqrt{||f_n - f_m||_{H_1}^2 + ||g_n - g_m||_{H_2}^2} \to 0 \quad (n,m \to \infty) \\
&\iff \quad ((f_n, g_n)) \text{ Cauchyfolge in } H_1 \oplus H_2
\end{aligned}$$

□

DEFINITION 1.7

Sei $D(T) \subset H_1$, $T : D(T) \to H_2$ linearer Operator .
Dann sei

$$G(T) := \{(f, Tf) \in H_1 \oplus H_2 : \ f \in D(T)\}$$

*der **Graph** von T.*

SATZ 1.8

$G \subset H_1 \oplus H_2$ ist genau dann der Graph eines linearen Operators, wenn $G \subset H_1 \oplus H_2$ Untervektorraum ist mit $(0,g) \in G \Longrightarrow g = 0$.
Insbesondere ist jeder Untervektorraum eines Graphen ein Graph.

BEWEIS.

a) Sei $T : D(T) \to H_2$ linear

$$\begin{aligned}
(f_1, Tf_1), \ (f_2, Tf_2) \in G(T) \quad &\Longrightarrow \quad \lambda(f_1, Tf_1) + \mu(f_2, Tf_2) = \\
&\qquad = (\lambda f_1 + \mu f_2, T(\lambda f_1, \mu f_2)) \in G(T) \\
\text{Ist } (0,g) \in G(T) \quad &\Longrightarrow \quad g = T(0) = 0
\end{aligned}$$

b) Sei G UVR mit $(0,g) \in G$
$\Longrightarrow g = 0$
Setze $D(T) := \{f \in H_1 : \exists g \in H_2 \text{ mit } (f,g) \in G\}$.
Sei $f \in D(T)$ und $(f, g_i) \in G \quad (i = 1,2)$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad (0, g_1 - g_2) = (f, g_1) - (f, g_2) \in G \\
&\Longrightarrow \quad g_1 - g_2 = 0
\end{aligned}$$

Setze nun für $(f,g) \in G: \; Tf := g$.
Seien $(f_i, g_i) \in G \quad (i = 1,2)$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad (\lambda f_1 + \mu f_2, \lambda g_1 + \mu g_2) = \lambda(f_1, g_1) + \mu(f_2, g_2) \in G \\
&\Longrightarrow \quad D(T) \text{ UVR}, \quad T(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda g_1 + \mu g_2 = \lambda T f_1 + \mu T f_2 \\
&\Longrightarrow \quad T \text{ linear}
\end{aligned}$$

□

SATZ 1.9

Sei $D(T) \subset H_1, \; T : D(T) \to H_2$ linear.

a) T abgeschlossen $\Longleftrightarrow G(T) \subset H_1 \oplus H_2$ abgeschlossen.

b) T abschließbar $\Longleftrightarrow \overline{G(T)}$ ist Graph eines linearen Operators.

c) T abschließbar $\Longleftrightarrow \overline{G(T)} = G(\overline{T})$.

BEWEIS.

a) **"$\Longrightarrow$":** Es gelte: T abgeschlossen.

Sei $(f_n, Tf_n) \subset G(T)$ mit $(f_n, Tf_n) \to (f,g) \in H_1 \oplus H_2$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad f_n \to f, \; Tf_n \to g \\
&\overset{T \text{ abgesclossen}}{\Longrightarrow} \quad f \in D(T), \; Tf = g \\
&\Longrightarrow \quad (f,g) = (f, Tf) \in G(T)
\end{aligned}$$

Also $G(T)$ abgeschlossen.

"$\Longleftarrow$": Es gelte: $G(T)$ abgeschlossen.

Sei $(f_n) \subset D(T), \; f_n \to f \in H_1, \; Tf_n \to g \in H_2$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \underbrace{(f_n, Tf_n)}_{\in G(T)} \to (f,g) \\
&\Longrightarrow \quad (f,g) \in G(T) \\
&\Longleftrightarrow \quad f \in D(T) \text{ und } Tf = g
\end{aligned}$$

b) **”$\Longleftarrow$”:** Es gelte: $\overline{G(T)}$ Graph.

Sei $f_n \to 0,\ Tf_n \to g,\ (f_n) \subset D(T)$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow && \underbrace{(f_n, Tf_n)}_{\in G(T)} \to (0, g) \\ &\Longrightarrow && (0, g) \in \overline{G(T)} \text{ Graph} \\ &\overset{1.8}{\Longrightarrow} && g = 0 \end{aligned}$$

Also T abschließbar.

”$\Longrightarrow$”: Es gelte: T abschließbar.

$G(T)$ UVR $\Longrightarrow \overline{G(T)}$ UVR.

Sei $(0, g) \in \overline{G(T)}$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow && \exists (f_n, Tf_n) \in G(T) \text{ mit } (f_n, Tf_n) \to (0, g) \\ &\Longrightarrow && f_n \to 0,\ Tf_n \to g \\ &\Longrightarrow && g = 0 \end{aligned}$$

Also $\overline{G(T)}$ Graph.

c) **”$\Longrightarrow$”:** Es gelte: T abschließbar.

”$\subset$”: Sei $(f, g) \in \overline{G(T)}$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow && \exists(\underbrace{f_n}_{\in D(T)}, Tf_n) \to (f, g) \\ &\Longrightarrow && (f_n) \subset D(T) \subset D(\overline{T}),\ f_n \to f\ , \overline{T}f_n = Tf_n \to g \\ &\overset{\overline{T}\text{ abgeschlossen}}{\Longrightarrow} && \overline{T}f = g \\ &\Longrightarrow && (f, g) = (f, \overline{T}f) \in G(\overline{T}) \end{aligned}$$

”$\supset$”: Sei $(f, \overline{T}f) \in G(\overline{T})$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow && f \in D(\overline{T}) \\ &\overset{\text{Beweis von}}{\underset{\text{Satz 1.4}}{\Longrightarrow}} && \exists (f_n) \subset D(T),\ f_n \to f,\ Tf_n \to \overline{T}f \\ &\Longrightarrow && \underbrace{(f_n, Tf_n)}_{\in G(T)} \to (f, \overline{T}f) \end{aligned}$$

Also $(f, \overline{T}f) \in \overline{G(T)}$.

”$\Longleftarrow$”: Es gelte: $\overline{G(T)} = G(\overline{T})$.

Offensichtlich ist $\overline{G(T)}$ Graph

$\overset{b)}{\Longrightarrow}$ T abschliessbar.

$\square$

SATZ 1.10

Sei $D(T) \subset H_1, T : D(T) \to H_2$ linear.

a) Ist T abgeschlossen, so ist $N(T)$ abgeschlossen.

b) Sei T injektiv.
Dann ist T abgeschlossen genau dann, wenn T^{-1} abgeschlossen ist.

BEWEIS.

a) Sei $(f_n) \subset N(T),\ f_n \to f \in H_1$

$$\begin{aligned} Tf_n = 0 \to 0 \quad &\overset{T \text{ abgeschlossen}}{\Longrightarrow} \quad f \in D(T),\ Tf = 0 \\ &\Longrightarrow \quad f \in N(T) \end{aligned}$$

b) Sei $(f_n) \subset R(T),\ f_n \to f,\ T^{-1} f_n \to g \in H_1$

$$\begin{aligned} \exists h_n \in D(T) \text{ mit } f_n = Th_n \quad &\Longrightarrow \quad h_n = T^{-1} f_n \to g,\ Th_n = f_n \to f \\ &\overset{T \text{ abgeschlossen}}{\Longrightarrow} \quad Tg = f,\ g \in D(T) \\ &\Longrightarrow \quad f \in R(T),\ T^{-1} f = g \end{aligned}$$

□

SATZ 1.11

Sei $D(T) \subset H, T : D(T) \to H$ beschränkt.

a) Dann ist T abschließbar.

b) T abgeschlossen $\Longleftrightarrow D(T)$ abgeschlossen.

BEWEIS.

a) Sei $(f_n) \subset D(T),\ f_n \to 0,\ Tf_n \to g$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad Tf_n \to T(0) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad g = 0 \end{aligned}$$

b) **”$\Longrightarrow$”:** Es gelte: T abgeschlossen.

Sei $(f_n) \subset D(T),\ f_n \to f \in H$

$$\begin{aligned} &\underset{T \text{ beschränkt}}{\Longrightarrow} \quad (Tf_n) \text{ Cauchyfolge, d.h. } \exists g \in H:\ Tf_n \to g \\ &\Longrightarrow \quad \underbrace{(f_n, Tf_n)}_{\in G(T) \text{ abgeschlossen}} \to (f,g) \\ &\Longrightarrow \quad (f,g) \in G(T) \\ &\Longrightarrow \quad f \in D(T) \end{aligned}$$

”$\Longleftarrow$”: Es gelte: $D(T)$ abgeschlossen.

Sei $(f_n) \subset D(T),\ f_n \to f \in H,\ Tf_n \to g \in H$

$$\begin{aligned} &\overset{D(T) \text{ abgeschlossen}}{\Longrightarrow} \quad f \in D(T) \\ &\overset{T \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \quad Tf_n \to Tf \\ &\Longrightarrow \quad Tf = g \end{aligned}$$

$\square$

SATZ 1.12

Sei $D(T) \subset H$ dicht, $T: D(T) \to H$ linear.
Sei $D(T^*) := \{g \in H : \exists g^* \in H \text{ mit } \langle g, Tf\rangle = \langle g^*, f\rangle\ \forall f \in D(T)\}$.
Setze $T^*: D(T^*) \to H,\ T^*g := g^*$.
Dann ist T^* wohldefiniert, linear, und es gilt

$$\langle g, Tf\rangle = \langle T^*g, f\rangle \quad \forall g \in D(T^*)\ \forall f \in D(T)$$

*T^* heißt der zu T **adjungierte Operator**.*

BEWEIS.
Sei $g \in D(T^*),\ g_i^* \in H$ mit $\langle g, Tf \rangle = \langle g_i^*, f \rangle \quad \forall f \in D(T) \quad (i = 1, 2)$

$$\implies \langle g_1^* - g_2^*, f \rangle = 0 \quad \forall f \in D(T) \text{ dicht in } H$$
$$\implies g_1^* = g_2^*$$

Seien $g,\ h \in D(T^*)$

$$\implies \langle \lambda g + \mu h, Tf \rangle = \lambda^* \langle g, Tf \rangle + \mu^* \langle h, Tf \rangle = \lambda^* \langle g^*, f \rangle + \mu^* \langle h^*, f \rangle = \langle \lambda g^* + \mu h^*, f \rangle$$
$$\implies D(T^*) \text{ UVR und } (\lambda g + \mu h)^* = \lambda g^* + \mu h^*$$
$$\implies T^* \text{ linear.}$$

□

SATZ 1.13
Sei $D(T) \subset H$ dicht, $T : D(T) \to H$ linear.
Dann ist T^* abgeschlossen.

BEWEIS.
Sei $(g_n) \subset D(T^*),\ g_n \to g \in H,\ T^* g_n \to h \in H$

$$\implies \langle Tf, g_n \rangle = \langle f, T^* g_n \rangle \quad \forall f \in D(T)\ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\implies \langle Tf, g \rangle = \langle f, h \rangle \quad \forall f \in D(T)$$
$$\overset{\text{Satz 1.12}}{\implies} g \in D(T^*) \text{ und } T^* g = h$$

□

LEMMA 1.14
Sei $D(A) \subset H$ dicht, $A : D(A) \to H$ linear, $A \subset B$.
Dann ist $B^* \subset A^*$.

BEWEIS.
Sei $g \in D(B^*)$.
Sei $f \in D(A) \subset D(B)$

$$\implies \langle g, Af \rangle = \langle g, Bf \rangle = \langle B^* g, f \rangle$$
$$\overset{\text{Satz 1.12}}{\implies} g \in D(A^*) \text{ und } A^* g = B^* g$$

□

SATZ 1.15
Sei $D(T) \subset H$ dicht, $T : D(T) \to H$ linear. Weiter sei $D(T^*)$ dicht in H.
Dann ist T abschließbar und

$$\overline{T}^* = T^*$$

BEWEIS.

a) Sei $(f_n) \subset D(T)$, $f_n \to 0$, $Tf_n \to h \in H$.
Sei $g \in D(T^*)$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow & \langle h, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tf_n, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, T^*g\rangle = 0 \\ &\underset{D(T^*)\text{ dicht}}{\Longrightarrow} & h = 0 \end{aligned}$$

Also T abschließbar.

b) $T \subset \overline{T},\ D(T)$ dicht
$\overset{\text{Lemma 1.14}}{\Longrightarrow} \overline{T}^* \subset T^*$.
Sei $g \in D(T^*)$.
Für $f \in D(\overline{T})$

$$\begin{aligned} & \overset{\text{Satz 1.4}}{\Longrightarrow} & \exists (f_n) \subset D(T) : f_n \to f \text{ und } Tf_n \to \overline{T}f \\ \langle Tf_n, g\rangle = \langle f_n, T^*g\rangle & \Longrightarrow & \langle \overline{T}f, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle \quad \forall f \in D(\overline{T}) \\ & \overset{\text{Satz 1.12}}{\Longrightarrow} & g \in D(\overline{T}^*) \text{ und } \overline{T}^*g = T^*g \end{aligned}$$

Also $T^* \subset \overline{T}^*$.

□

LEMMA 1.16

Sei $D(T) \subset H$ dicht, $T : D(T) \to H$ linear.
Dann gilt: $N(T^*) = R(T)^\perp$, also $H = \overline{R(T)} \oplus N(T^*)$.

BEWEIS.

$$\begin{aligned} g \in N(T^*) &\iff g \in D(T^*),\ T^*g = 0 \\ &\iff 0 = \langle T^*g, f\rangle = \langle g, Tf\rangle \quad \forall f \in D(T) \\ &\iff g \in R(T)^\perp \end{aligned}$$

□

DEFINITION 1.17

Sei H Hilbertraum. Definiere

$$U : H \oplus H \to H \oplus H,\ U(f_1, f_2) := (f_2, -f_1)$$

$$V : H \oplus H \to H \oplus H,\ V(f_1, f_2) := (f_2, f_1)$$

LEMMA 1.18

U, V sind unitär,

$$\begin{aligned} U^2 &= -I \\ V^2 &= I \\ UV &= -VU \end{aligned}$$

Ist $M \subset H$ Untervektorraum, so ist

$$\begin{aligned} UV(M) &= VU(M) \\ U^2(M) &= M \\ V^2(M) &= M \end{aligned}$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} VU(f_1, f_2) &= V(f_2, -f_1) = (-f_1, f_2) \\ UV(f_1, f_2) &= U(f_2, f_1) = (f_1, -f_2) \end{aligned}$$

Rest klar. □

LEMMA 1.19

Sei $W : H \to H$ unitär, $A \subset H$ Untervektorraum.
Dann gilt

$$W(A^\perp) = W(A)^\perp$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} g \in W(A^\perp) &\implies \exists h \in A^\perp : g = Wh \\ &\implies \forall f \in A \text{ ist } 0 = \langle h, f\rangle \underset{\text{Isometrie}}{=} \langle Wh, Wf\rangle = \langle g, Wf\rangle \\ &\implies g \in W(A)^\perp \\ g \in W(A)^\perp &\implies 0 = \langle g, Wf\rangle = \langle WW^{-1}g, Wf\rangle = \langle W^{-1}g, f\rangle \\ &\implies W^{-1}g \in A^\perp \\ &\implies g \in W(A^\perp) \end{aligned}$$

□

SATZ 1.20

Sei $D(T) \subset H$ dicht, $T : D(T) \to H$ linear.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} G(T^*) &= U(G(T)^\perp) \\ G(T)^\perp &= U(G(T^*)) \end{aligned}$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} (g,h) \in G(T^*) &\iff g \in D(T^*),\ h = T^*g \\ &\overset{1.12}{\iff} \langle g, Tf\rangle = \langle h, f\rangle\ \forall f \in D(T) \\ &\iff \langle (g,h), U(f,Tf)\rangle = \langle (g,h), (Tf, -f)\rangle \\ &\qquad = \langle g, Tf\rangle - \langle h, f\rangle = 0\ \forall f \in D(T) \\ &\iff (g,h) \in (U(G(T))^\perp \underset{1.19}{=} U(G(T)^\perp) \end{aligned}$$

Rest mit 1.18. □

SATZ 1.21

Sei $D(T) \subset H$, $T : D(T) \to H$ injektiv und linear.
Dann gilt:

$$G(T^{-1}) = V(G(T))$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} (f,Tf) \in G(T) &\implies V(f,Tf) = (Tf,f) = (Tf, T^{-1}Tf) \in G(T^{-1}) \\ &\overset{V^2=E}{\implies} (f,Tf) \in VG(T^{-1}) \\ \text{Analog } G(T^{-1}) \subset VG(T) &\implies VG(T^{-1}) \subset V^2G(T) = G(T) \end{aligned}$$

□

SATZ 1.22

Sei $D(T) \subset H$ dicht, $T : D(T) \to H$ linear und injektiv. Weiter sei $R(T)$ dicht in H.
Dann ist T^* injektiv und

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

BEWEIS.
Nach 1.16 ist $N(T^*) = R(T)^\perp = \{0\}$ (da $\overline{R(T)} = H$)
$\Longrightarrow T^*$ injektiv.

$$\begin{aligned} G((T^{-1})^*) \underset{1.20}{=} & \; U\left[G(T^{-1})^\perp\right] \underset{1.21}{=} U\left[(V(G(T)))^\perp\right] = UV(G(T)^\perp) = \\ = & \; V\left[U(G(T)^\perp)\right] = VG(T^*) = G((T^*)^{-1}) \end{aligned}$$

$\underset{\text{offensichtlich}}{\Longrightarrow} (T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ □

LEMMA 1.23
Sei $M \subset H$ abgeschlossener Untervektorraum.
Dann gilt:

$$M = M^{\perp\perp}$$

BEWEIS.
$M^{\perp\perp} = \left\{f \in H : \langle f, g\rangle = 0 \,\forall g \in M^\perp\right\}$

$$\begin{aligned} f \in M &\Longrightarrow \langle f, g\rangle = 0 \quad \forall g \in M^\perp \\ &\Longrightarrow f \in M^{\perp\perp} \\ f \in M^{\perp\perp} &\Longrightarrow f = \underbrace{f_1}_{\in M} + \underbrace{f_2}_{\in M^\perp} \\ 0 = \langle f, f_2\rangle = \underbrace{\langle f_1, f_2\rangle}_{=0} + \langle f_2, f_2\rangle = ||f_2||^2 &\Longrightarrow f_2 = 0 \\ &\Longrightarrow f = f_1 \in M \end{aligned}$$

□

SATZ 1.24
Sei $D(T) \subset H$ dicht. $T : D(T) \to H$ linear und abgeschlossen.
Dann ist $D(T^*)$ dicht und

$$T^{**} = T$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \text{Sei } \varphi \in D(T^*)^\perp &\Longrightarrow \langle U(f, T^*f), (0,\varphi)\rangle = \langle -(-T^*f, f), (0,\varphi)\rangle = \langle f, \varphi\rangle = 0 \quad \forall f \in D(T^*) \\ &\Longrightarrow (0,\varphi) \in U\left(G(T^*)\right)^\perp = G(T)^{\perp\perp} \overset{1.9}{\underset{1.23}{=}} G(T) \\ &\Longrightarrow (0,\varphi) \in G(T) \\ &\Longrightarrow \varphi = T(0) = 0 \\ &\Longrightarrow D(T^*) \text{ dicht} \end{aligned}$$

Nach Satz 1.20 ist

$$\begin{aligned} G(T^*)^\perp &= U\left(G(T^{**})\right) \\ \text{und } G(T^*)^\perp &= U\left(G(T^\perp)\right)^\perp \underset{1.19}{=} U\left(G(T)^{\perp\perp}\right) = U\left(G(T)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad U\left(G(T^{**})\right) = U\left(G(T)\right) \\ &\underset{U^2=I}{\Longrightarrow} \quad G(T^{**}) = G(T) \\ &\Longrightarrow \quad T^{**} = T \end{aligned}$$

$\square$

SATZ 1.25

Sei $D(T) \subset H$ dicht, $T : D(T) \to H$ linear und abschließbar.
Dann ist $D(T^*) \subset H$ dicht, und

$$\overline{T} = T^{**}$$

BEWEIS.
Es ist $\overline{T}$ abgeschlossen, $D(T) \subset D(\overline{T}) \subset H$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad D(\overline{T}) \text{ dicht} \\ &\underset{1.24}{\Longrightarrow} \quad D(\overline{T}^*) \text{ dicht in } H,\ \overline{T} = \overline{T}^{**} \\ T \subset \overline{T} \quad &\underset{1.14}{\Longrightarrow} \quad \overline{T}^* \subset T^* \\ &\Longrightarrow \quad D(\overline{T}^*) \subset D(T^*) \\ \text{also } D(T^*) \text{ dicht in } H \quad &\underset{1.15}{\Longrightarrow} \quad \overline{T}^* = T^* \\ &\Longrightarrow \quad \overline{T} = \overline{T}^{**} = \left(\overline{T}^*\right)^* = (T^*)^* = T^{**} \end{aligned}$$

$\square$

SATZ 1.26 Satz vom abgeschlossenen Graphen

Sei $T : H \to H$ abgeschlossen.
Dann ist T beschränkt.

BEWEIS.
Sei $\widetilde{M} := \{g \in D\,(T^*) : ||g|| \le 1\}$
und sei für $g \in \widetilde{M} \quad Lg(f) := \langle T^* g, f\rangle \quad \forall f \in H$
$\Longrightarrow Lg : H \to \mathbb{C}$ lineares, beschränktes Funktional.
Ist $f \in H$ fest, so ist

$$|Lg(f)| = |\langle g, Tf\rangle| \le \underbrace{||g||}_{\le 1} \, ||Tf|| \le ||Tf|| =: c_f \, \forall g \in \widetilde{M}$$

$$\begin{array}{rcl} & \overset{\text{Banach}}{\underset{\text{?Steinhaus?}}{\Longrightarrow}} & \exists c > 0 : \|Lg\| \le c \quad \forall g \in \widetilde{M} \\ & \Longrightarrow & |Lg(f)| \le c\|f\| \quad \forall f \in H \; \forall g \in \widetilde{M} \\ & \Longrightarrow & |\langle T^* g, f\rangle| \le c\|f\| \quad \forall f \in H \; \forall g \in \widetilde{M} \\ \text{Setze } f = T^* g & \Longrightarrow & \|T^* g\| \le c \quad \forall g \in \widetilde{M} \\ & \Longrightarrow & \|T^* g\| \le c\|g\| \quad \forall g \in D(T^*) \end{array}$$

Da nach 1.24 $D(T^*)$ dicht in H, gibt es nach Funktionalanalysis I, 4.4, eine eindeutige Fortsetzung $\widetilde{T} \in B(H)$

$$\begin{array}{rl} \text{Also } T^* \subset \widetilde{T} \quad \overset{1.14}{\underset{1.24}{\Longrightarrow}} & \widetilde{T}^* \subset T^{**} = T \text{ und } D\left(\widetilde{T}^*\right) \underset{\text{FunkAna I}}{=} H = D(T) \\ \Longrightarrow & T = \widetilde{T}^* \underset{\text{FunkAna I}}{\in} B(H) \end{array}$$

$\square$

2. Hermitesche Operatoren

Sei im Folgenden H Hilbertraum über $\mathbb{C}$.

DEFINITION 2.1

Sei $A : D(A) \to H$ dicht definiert und linear.
A heißt ***hermitesch****, wenn*

$$\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle \quad \forall f, g \in D(A)$$

LEMMA 2.2

Jeder hermitesche Operator ist abschließbar.

BEWEIS.

$$\begin{aligned} D(A) \text{ dicht} &\implies A^* \text{ existiert} \\ \text{Ist } g \in D(A) &\implies \langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle \\ &\implies g \in D(A^*) \text{ und } A^*g = Ag \\ &\implies A \subset A^* \text{ abgeschlossen nach } 1.13 \\ &\overset{1.4}{\implies} A \text{ abschließbar} \end{aligned}$$

$\square$

BEISPIEL 2.3 für hermitesche Operatoren

a) $I = [0,1],\ H = L^2(I),\ D(A) = C_0^2\left(\overset{\circ}{I}\right)$

$$\begin{aligned} Af &:= f'' \\ \langle Af, g\rangle &= \int_0^1 (f'')^* g\, dx = \int_0^1 (f^*)'' g\, dx \overset{\text{Ana III}}{=} \int_0^1 f^* g''\, dx = \langle f, Ag\rangle \end{aligned}$$

b) $H = L^2(\mathbb{R}^n),\ D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$Au := -\Delta u$$

c) $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $H = L^2(G),\ D(A) = C_0^\infty(G)$

$$Au := -\Delta u$$

◇

DEFINITION 2.4

Sei $A : D(A) \to H$ dicht definiert und linear.
*A heißt **selbstadjungiert**, wenn gilt:*

$$A = A^*$$

LEMMA 2.5

a) A selbstadjungiert $\Longrightarrow$ A abgeschlossen.

b) A ist selbstadjungiert genau dann, wenn

(i) A hermitesch

(ii) $g, g^* \in H$, $\langle Af, g\rangle = \langle f, g^*\rangle \quad \forall f \in D(A) \Longrightarrow g \in D(A)$, $Ag = g^*$

BEWEIS.

a) $A = A^*$ abgeschlossen nach 1.13

b) **"$\Longrightarrow$":** Es gelte: $A = A^*$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad A \text{ hermitesch} \\ \text{Ist } \langle Af, g\rangle = \langle f, g^*\rangle \quad \forall f \in D(A) \quad &\Longrightarrow \quad g \in D(A^*) = D(A) \text{ und } g^* = A^*g = Ag \end{aligned}$$

"$\Longleftarrow$":

$$\begin{aligned} A \text{ hermitesch} \quad &\Longrightarrow \quad A \subset A^* \\ g \in D(A^*) \quad &\Longrightarrow \quad \langle Af, g\rangle = \langle f, A^*g\rangle \quad \forall f \in D(A) \\ &\Longrightarrow \quad g \in D(A),\ Ag = A^*g \\ &\Longrightarrow \quad A^* \subset A \end{aligned}$$

□

SATZ 2.6

Sei $A : H \to H$ hermitesch.
Dann ist A selbstadjungiert und beschränkt.

BEWEIS.

$$\begin{aligned} D(A) = H \quad &\underset{A\subset A^*}{\Longrightarrow} \quad D(A^*) = H = D(A) \\ &\Longrightarrow \quad A = A^* \\ &\overset{2.5}{\Longrightarrow} \quad A \text{ abgeschlossen} \\ &\overset{1.26}{\Longrightarrow} \quad A \text{ beschränkt} \end{aligned}$$

□

DEFINITION 2.7

Sei $A : D(A) \to H$ dicht definiert und linear.
A heißt ***wesentlich selbstadjungiert****, wenn*

1. *A hermitesch*
2. *$\overline{A}$ selbstadjungiert*

BEMERKUNG.
selbstadjungiert $\subsetneq$ wesentlich selbstadjungiert $\subsetneq$ hermitesch

LEMMA 2.8

Sei A hermitesch.
Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$||(A-z)f|| \geq |\Im z|\,||f|| \quad \forall f \in D(A)$$

BEWEIS.
Sei $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow A_a := A - aE$ ist hermitesch

$$\begin{aligned}
(A-z)f &= (A-a)f - ibf = A_a f - ibf \\
\Longrightarrow \|(A-z)f\|^2 &= \|A_a f - ibf\|^2 = \|A_a f\|^2 - 2\Re\langle A_a f, ibf\rangle + b^2||f||^2 \\
\text{Es ist } \langle A_a f, ibf\rangle &= ib\langle A_a f, f\rangle = ib\langle f, A_a f\rangle = -\langle ibf, A_a f\rangle = -\langle A_a f, ibf\rangle^* \\
\Longrightarrow \Re\langle A_a f, ibf\rangle &= 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung ☐

LEMMA 2.9

a) *Sei $A : D(A) \to H$ abschließbar, $z \in \mathbb{C}$, $d > 0$ und $||(A-z)f|| \geq d||f|| \quad \forall f \in D(A)$.*
Dann ist
$$\overline{R(A-z)} = R(\overline{A} - z)$$

b) *Ist A hermitesch und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so gilt*
$$\overline{R(A-z)} = R(\overline{A} - z)$$

BEWEIS. Übungsaufgabe ☐

FOLGERUNG 2.10

Ist A hermitesch, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so ist $(A-zE)^{-1}$ beschränkter, linearer Operator in $R(A-zE)$ und es gilt

$$||(A-zE)^{-1}|| \leq |\Im z|^{-1}$$

Weiter ist $R(\overline{A} - zE)$ abgeschlossen, und dort ist $(\overline{A} - zE)^{-1}$ beschränkt.

BEWEIS.
Zeige: A hermitesch $\Longrightarrow \overline{A}$ hermitesch

$$A \subset A^* \quad \Longrightarrow \quad \overline{A} \subset A^*$$

$$\text{Seien } f, g \in \underbrace{D(\overline{A})}_{\subset D(A^*)} \quad \Longrightarrow \quad \langle \overline{A} f, g\rangle \stackrel{D(A)\ni f_n \to f}{=} \lim_{n\to\infty} \langle A f_n, g\rangle \stackrel{g\in D(A^*)}{=} \lim_{n\to\infty} \langle f_n, A^* g\rangle =$$

$$= \langle f, A^* g\rangle \stackrel{\overline{A}\subseteq A^*}{=} \langle f, \overline{A} g\rangle$$

□

SATZ 2.11

Sei $A : D(A) \to H$ hermitesch.
Dann gilt:

$$A \text{ selbstadjungiert} \Longleftrightarrow R(A+i) = R(A-i) = H$$

BEWEIS.

1. Es gelte: A selbstadjungiert.

$$\begin{array}{rcl}
\text{Sei } z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} & \underset{A=\overline{A}}{\overset{2.9}{\Longrightarrow}} & R(A-z) \text{ abgeschlossen} \\
\text{Sei } g \in R(A-z)^{\perp} & \Longleftrightarrow & \langle g, (A-z)f\rangle = 0 \quad \forall f \in D(A) \\
& \Longleftrightarrow & \langle g, Af\rangle = \langle z^* g, f\rangle \quad \forall f \in D(A) \\
& \Longrightarrow & g \in D(A^*) = D(A) \text{ und } Ag = A^* g = z^* g \\
& \Longrightarrow & (A - z^*) g = 0 \\
& \overset{2.8}{\Longrightarrow} & g = 0 \\
& \underset{\text{Zerlegung}}{\overset{\text{orthogonale}}{\Longrightarrow}} & R(A-z) = H \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}
\end{array}$$

2. Es gelte: $R(A+i) = R(A-i) = H$
   Sei $g \in D(A^*),\ g^* := A^* g$

$$\begin{array}{rcl}
& \Longrightarrow & \langle g, Af\rangle = \langle g^*, f\rangle \quad \forall f \in D(A) \\
& \Longrightarrow & \langle g, (A+i)f\rangle = \langle g^*, f\rangle + \langle g, if\rangle = \langle g^*, f\rangle - \langle ig, f\rangle = \langle g^* - ig, f\rangle \\
R(A-i) = H & \Longrightarrow & \exists h \in D(A) :\ (A-i)h = g^* - ig \\
& \text{Also} & \langle g, (A+i)f\rangle = \langle (A-i)h, f\rangle = \langle Ah, f\rangle - \langle ih, f\rangle \\
& & \stackrel{A \text{ hermitesch}}{=} \langle h, Af\rangle - \langle ih, f\rangle = \langle h, (A+i)f\rangle \quad \forall f \in D(A) \\
& \overset{R(A+i)=H}{\Longrightarrow} & g = h \in D(A) \\
& \overset{A\subseteq A^*}{\Longrightarrow} & Ag = A^* g \\
& \Longrightarrow & A = A^*
\end{array}$$

□

SATZ 2.12

*Sei $A : D(A) \to H$ hermitesch, $c \in \mathbb{R}$, $(A+c)$ injektiv und $R(A+c) = H$.
Dann ist A selbstadjungiert und $(A+c)^{-1}$ beschränkt.*

BEWEIS.

a)

$$
\begin{array}{rcl}
A \text{ hermitesch} & \Longrightarrow & A \subset A^* \\
\text{Sei } g \in D(A^*) & \Longrightarrow & \langle g, Af \rangle = \langle A^* g, f \rangle \quad \forall f \in D(A) \\
 & \Longrightarrow & \langle g, (A+c)f \rangle = \langle A^* g, f \rangle + \langle cg, f \rangle = \langle A^* g + cg, f \rangle \\
R(A+c) = H & \Longrightarrow & \exists h \in D(A) : \ (A+c)h = A^* g + cg \\
 & \Longrightarrow & \langle g, (A+c)f \rangle = \langle (A+c)h, f \rangle \overset{A \text{ hermitesch}}{=} \langle h, (A+c)f \rangle \\
 & \overset{R(A+c)=H}{\Longrightarrow} & g = h \in D(A) \\
 & \Longrightarrow & A = A^*
\end{array}
$$

b) Zeige: $(A+c)$ abgeschlossen
Sei $(f_n) \subset D(A)$, $f_n \to f \in H$, $(A+c)f_n \to g \in H$

$$
\begin{array}{rcl}
 & \Longrightarrow & Af_n \to g - cf \in H \\
 & \overset{A \text{ abgeschlossen}}{\Longrightarrow} & f \in D(A), \ Af_n \to Af \\
 & \Longrightarrow & (A+c)f = g \\
\text{Also } (A+c) \text{ abgeschlossen} & \overset{1.10}{\Longrightarrow} & (A+c)^{-1} \text{ abgeschlossen und } R(A+c) = H \\
 & \underset{\text{schlossenen Graphen}}{\overset{\text{Satz vom abge-}}{\Longrightarrow}} & (A+c)^{-1} \text{ beschränkt}
\end{array}
$$

□

SATZ 2.13

Sei $A : D(A) \to H$ hermitesch. Dann gilt:

$$A \textit{ wesentlich selbstadjungiert} \iff \overline{R(A+i)} = \overline{R(A-i)} = H$$

BEWEIS.
Nach 2.9 ist $\overline{R(A \pm i)} = R(\overline{A} \pm i)$ und $R(\overline{A} \pm i) = H \overset{2.11}{\iff} \overline{A}$ selbstadjungiert. □

SATZ 2.14

Sei $A : D(A) \to H$ hermitesch, $c \in \mathbb{R}$, $\overline{R(A+c)} = H$, $(A+c)$ injektiv und $(A+c)^{-1}$ beschränkt. Dann ist A wesentlich selbstadjungiert.

BEWEIS.
Nach Voraussetzung $\exists \gamma > 0 : \ \|(A+c)^{-1}g\| \leq \gamma \|g\| \ \forall g \in R(A+c)$

$$
\begin{aligned}
\text{Setze } g = (A+c)f \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{\gamma}\|f\| \leq \|(A+c)f\| \quad \forall f \in D(A) \\
&\overset{2.9a)}{\Longrightarrow} \quad R(\overline{A}+c) = \overline{R(A+c)} = H \\
&\overset{2.12}{\Longrightarrow} \quad \overline{A} \text{ selbstadjungiert } (\overline{A}+c \text{ injektiv wird in a) nicht gebraucht)}
\end{aligned}
$$

□

BEISPIEL 2.15
$H = L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle f, g\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^* g \, dx$

$$
\begin{aligned}
D(A) &:= C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \\
Au &:= -\Delta u = -\sum_{k=1}^n \partial_k \partial_k u
\end{aligned}
$$

Zeige: A wesentlich selbstadjungiert.

1) Für $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist

$$
\langle -\Delta u, v\rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^n \partial_k \partial_k u^* v \, dx \overset{\text{AnaIII}}{\underset{\text{Blatt 10}}{=}} -\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^* \Delta v \, dx = \langle u, -\Delta v\rangle
$$

$\Longrightarrow A$ hermitesch

2)

$$
\langle -\Delta u, u\rangle \overset{\text{AnaIII}}{\underset{\text{Blatt 10}}{=}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^n \partial_k u^* \partial_k u \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Sei } c \in \mathbb{R},\ c > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \langle (A+c)u, u\rangle = \langle -\Delta u, u\rangle + c\langle u, u\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx + c||u||^2 \geq c||u||^2 \\
&\Longrightarrow \quad c\|u\|^2 \overset{\text{Schwarz}}{\leq} \|(A+c)u\|\|u\| \\
&\Longrightarrow \quad c\|u\| \leq \|(A+c)u\| \\
&\Longrightarrow \quad A+c \text{ injektiv und } (A+c)^{-1} \text{ beschränkt}
\end{aligned}
$$

3) Zeige noch: $\overline{R(A+c)} = H$ (Dann folgt mit 2.14 die Behauptung)

$$\begin{aligned}\text{Wäre } \overline{R(A+c)} \subsetneq H \quad &\Longrightarrow \quad \exists f \in H,\ f \neq 0,\ f \perp R(A+c) \text{ (nach orthogonaler Zerlegung)}\\ &\Longrightarrow \quad \langle f, -\Delta u + cu\rangle = 0 \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

Sei j Glättungskern, d.h. $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j \geq 0$, $j(x) = 0\ \forall |x| \geq 1$, $j(x) = j(-x)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} j(x)\ dx = 1$

$$\begin{aligned} j_\varepsilon(x) &:= \varepsilon^{-n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\\ u_\varepsilon(x) &:= \int\limits_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)u(y)\ dy\end{aligned}$$

Sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow -\Delta u_\varepsilon(x) &\overset{\text{AnaIII}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \underbrace{-\Delta_x j_\varepsilon(x-y)}_{-\Delta_y j_\varepsilon(x-y)} u(y)\ dy \underset{\text{Blatt 10}}{\overset{\text{AnaIII}}{=}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)(-\Delta u(y))\ dy =\\ &= -(\Delta u)_\varepsilon(x)\\ \langle f, -\Delta u_\varepsilon\rangle &= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^*(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\Delta u(y)\ dy\ dx =\\ &\overset{\text{Fubini}}{=} -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta u(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \underbrace{j_\varepsilon(x-y)}_{j_\varepsilon(y-x)} f^*(x)\ dx\ dy = \langle f_\varepsilon, -\Delta u\rangle\\ \text{Genauso: } \langle f, u_\varepsilon\rangle &= \langle f_\varepsilon, u\rangle\\ \Longrightarrow 0 &= \langle f, -\Delta u_\varepsilon + cu_\varepsilon\rangle = \langle f_\varepsilon, -\Delta u + cu\rangle \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad (*)\end{aligned}$$

<u>Idee</u>: Setze $u = f_\varepsilon,\ f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, aber nicht notwendig $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Wähle $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ 0 \leq \eta \leq 1,\ \eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| \leq 1\\ 0 & \text{für} \quad |x| \geq 2\end{cases}$ (vgl. Ana IV, Blatt 1)

Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$\eta_k(x) := \eta(\frac{x}{k})$$

$\Longrightarrow (\partial_j \eta_k)(x) = (\partial_j \eta)(\frac{x}{k})\frac{1}{k}$

Sei $M > 0$ mit $|(\partial_j \eta)(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,\ \forall j = 1, ..., n$

Nach $(*)$:

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle f_\varepsilon, -\Delta(\eta_k^2 f_\varepsilon) + c\eta_k^2 f_\varepsilon\rangle = \int f_\varepsilon^* \left(-\Delta(\eta_k^2 f_\varepsilon)\right)\, dx + c\int f_\varepsilon^* \eta_k^2 f_\varepsilon\, dx = \\
&\overset{\text{Ana III}}{\underset{\text{Blatt 10}}{=}} \int \sum_{j=1}^n \partial_j f_\varepsilon^* \partial_j(\eta_k^2 f_\varepsilon)\, dx + c\int |\eta_k f_\varepsilon|^2\, dx = \\
&= \underbrace{\int 2\eta_k \sum_{j=1}^n (\partial_j f_\varepsilon^*)(\partial_j \eta_k) f_\varepsilon\, dx}_{=:I} + \int \eta_k^2 \underbrace{\sum_{j=1}^n \partial_j f_\varepsilon^* \partial_j f_\varepsilon}_{=|\nabla f_\varepsilon|^2}\, dx + c\int |\eta_k f_\varepsilon|^2\, dx \\
I &= 2\sum_{j=1}^n \int (\eta_k \partial_j f_\varepsilon^*)(f_\varepsilon \partial_j \eta_k)\, dx \\
\Longrightarrow |I| &\leq 2\sum_{j=1}^n \left(\int \eta_k^2 |\partial_j f_\varepsilon|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (\partial_j \eta_k)^2 |f_\varepsilon|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Es gilt: $2|a|\,|b| \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{\delta}$ (da $0 \leq \left(\sqrt{\delta}|a| - \frac{1}{\sqrt{\delta}}|b|\right)^2$)

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow |I| &\leq \delta \sum_{j=1}^n \int \eta_k^2 |\partial_j f_\varepsilon|^2\, dx + \delta^{-1} \sum_{j=1}^n \int (\partial_j \eta_k)^2 |f_\varepsilon|^2\, dx \\
&\leq \delta \int \eta_k^2 |\nabla f_\varepsilon|^2\, dx + \delta^{-1} n M^2 \frac{1}{k^2} \int |f_\varepsilon|^2\, dx \\
\Longrightarrow 0 &\geq \int \eta_k^2 |\nabla f_\varepsilon|^2\, dx + c\int |\eta_k f_\varepsilon|^2\, dx - \delta \int \eta_k^2 |\nabla f_\varepsilon|^2\, dx - \delta^{-1} n \frac{M^2}{k^2} \int |f_\varepsilon|^2\, dx \\
&\overset{||f_\varepsilon|| \leq ||f||}{\underset{\delta = \frac{1}{2}}{\geq}} \frac{1}{2} \int \eta_k^2 |\nabla f_\varepsilon|^2\, dx + c\int |\eta_k f_\varepsilon|^2\, dx - 2\frac{nM^2}{k^2} \|f\|^2 \\
&\geq c\int |\eta_k f_\varepsilon|^2\, dx - 2\frac{nM^2}{k^2} \|f\|^2 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0
\end{aligned}
$$

Für $k \to \infty$ folgt $\frac{1}{k^2} \to 0$
Weiter ist $0 \leq \eta_k(x) \leq 1$, $\eta_k \to 1$ punktweise in $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad &\overset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow} \quad \int \eta_k^2 |f_\varepsilon|^2\, dx \to \int |f_\varepsilon|^2\, dx \quad (k \to \infty) \\
&\Longrightarrow \quad 0 \geq c \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon|^2\, dx \\
&\Longrightarrow \quad f_\varepsilon = 0 \quad \text{fast überall} \\
&\Longrightarrow \quad \|f\| \leq \underbrace{\|f - f_\varepsilon\|}_{\to 0} + \underbrace{\|f_\varepsilon\|}_{=0} \\
&\Longrightarrow \quad f = 0
\end{aligned}
$$

Widerspruch. $\diamond$

SATZ 2.16

Sei $A : D(A) \to H$ hermitesch. Weiter sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H mit $A\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$, $\lambda_k \in \mathbb{C} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
Dann ist A wesentlich selbstadjungiert.

BEMERKUNG.
Nach FunkAna I, §0 ist dieser Satz auf das vorige Beispiel nicht anwendbar, da A dort keine Eigenwerte hat.

BEWEIS.

i) $\lambda_k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lambda_k\langle\varphi_k,\varphi_k\rangle &= \langle\varphi_k, A\varphi_k\rangle = \langle A\varphi_k,\varphi_k\rangle = \langle\lambda_k\varphi_k,\varphi_k\rangle = \lambda_k^*\langle\varphi_k,\varphi_k\rangle = \lambda_k^* \\ \Longrightarrow \lambda_k &= \lambda_k^*\end{aligned}$$

ii) Sei $H_1 := \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k : \quad n \in \mathbb{N},\ c_k \in \mathbb{C}\right\} \subset D(A)$ und H_1 dicht in H, da (φ_k) vollständiges Orthonormalsystem.

<u>Zeige</u>: Für $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ist $H_1 \subset R(A+z)$

Sei $g = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \in H_1$

Setze $d_k := \dfrac{c_k}{\lambda_k + z} \quad (\lambda_k + z \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N})$

Sei $f := \sum\limits_{k=1}^{n} d_k\varphi_k \in D(A)$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \quad (A+z)f = \sum_{k=1}^{n} d_k \underbrace{A\varphi_k}_{=\lambda_k\varphi_k} + \sum_{k=1}^{n} d_k z\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} d_k(\varphi_k + z)\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k = g \\ &\Longrightarrow \quad g \in R(A+z) \\ &\overset{\overline{H_1}=H}{\Longrightarrow} \quad \overline{R(A+z)} = H \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \\ &\overset{2.13}{\Longrightarrow} \quad A \text{ wesentlich selbstadjungiert}\end{aligned}$$

□

3. Die Resolvente selbstadjungierter Operatoren

Sei im Folgenden stets H Hilbertraum über $\mathbb{C}$

DEFINITION 3.1

Sei $T : D(T) \to H$ linear. Dann heißt

$$\varrho(T) := \{z \in \mathbb{C} : \ (T - zE) \text{ injektiv}, \ R(T - zE) = H, \ (T - zE)^{-1} \text{ beschränkt}\}$$

*die **Resolventenmenge von T***

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$$

*heißt **Spektrum von T**.*

SATZ 3.2

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert. Dann ist

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \varrho(A) \quad und \quad \|(A - zE)^{-1}\| \leq \frac{1}{\Im z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

BEWEIS.

Nach 2.8 ist $\|(A - zE)f\| \geq |\Im z|\|f\|$

Und nach Beweisteil a) von 2.11 ist $R(A - z) = H \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ □

SATZ 3.3

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert, $\lambda \in \mathbb{R}$

Dann gilt

$$\lambda \in \varrho(A) \Longleftrightarrow \exists d > 0 : \quad \|(A - \lambda)f\| \geq d\|f\|$$

BEWEIS.

"$\Longrightarrow$" klar

"$\Longleftarrow$" Es gelte $\|(A-\lambda)f\| \geq d\|f\|$
Nach 2.9 ist $R(A-\lambda E)$ abgeschlossen
Wäre $R(A-\lambda E) \subsetneq H \underset{\text{orth. Zerl.}}{\Longrightarrow} \exists 0 \neq h \in R(A-\lambda E)^{\perp}$
$\Longrightarrow \langle h, Af - \lambda f\rangle = 0$
$\Longrightarrow \langle h, Af\rangle = \langle \lambda h, f\rangle$
$\Longrightarrow h \in D(A^\star) = D(A), \quad Ah = A^\star h = \lambda h$
$\Longrightarrow \|(A-\lambda)h\| = 0 \quad \underset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} \quad h = 0 \quad \Longrightarrow$ Widerspruch

□

DEFINITION 3.4
Sei $A: D(A) \to H$ linear, $z \in \varrho(A)$
Dann heißt

$$R(z) := R(z_i A) := (A - zE)^{-1}$$

die ***Resolvente von A im Punkte*** $z \in \varrho(A)$

BEMERKUNG.

1. Ist T abgeschlossen ($\Longleftrightarrow T - zE$ abgeschlossen) und $T - zE$ injektiv $\underset{1.10}{\Longrightarrow} (T-zE)^{-1}$ abgeschlossen
   Ist $R(T - zE) = H \underset{\text{abgeschlossenem Graphen}}{\overset{\text{Satz vom}}{\Longrightarrow}} (T - zE)^{-1}$ beschränkt
   Also gilt für abgeschlossene T:
   $$\varrho(T) = \{z \in \mathbb{C}: \ (T - zE) \text{ injektiv}, \ R(T - zE) = H\}$$

2. Ist T nicht abgeschlossen $\Longrightarrow (T - zE)^{-1}$ nicht abgeschlossen
   $$\begin{aligned} \text{Wäre } z \in \varrho(T) \quad &\Longrightarrow \quad (T-zE)^{-1} \text{ beschränkt}, \ R(T-zE) = H \text{ abgeschlossen} \\ &\Longrightarrow \quad (T-zE)^{-1} \text{ abgeschlossen} \\ &\underset{1.11}{\Longrightarrow} \quad \text{Widerspruch} \end{aligned}$$
   Also $\varrho(T) = \emptyset$

SATZ 3.5 **1. Resolventengleichung**

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert. Seien $z_1, z_2 \in \varrho(A)$
Dann gilt

$$R(z_1) - R(z_2) = (z_1 - z_2)R(z_1)R(z_2) = (z_1 - z_2)R(z_2)R(z_1)$$

BEWEIS. Sei $f \in H$

$$\begin{aligned}
R(z_1)f - R(z_2)f &= (A-z_1)^{-1}f - (A-z_2)^{-1}f \\
&= (A-z_1)^{-1}(A-z_2)(A-z_2)^{-1}f - (A-z_1)^{-1}(A-z_1)(A-z_2)^{-1}f \\
&= (A-z_1)^{-1}(A-z_2-A+z_1)(A-z_2)^{-1}f \\
&= (z_1-z_2)(A-z_1)^{-1}(A-z_2)^{-1}f \\
&= (z_1-z_2)R(z_1)R(z_2)f \\
\text{Weiter } R(z_1) - R(z_2) &= -\left(R(z_2) - R(z_1)\right) \overset{\text{1. Teil}}{=} -\left((z_2-z_1)R(z_2)R(z_1)\right) \\
&= (z_1-z_2)R(z_2)R(z_1)
\end{aligned}$$

□

SATZ 3.6

Sei $C \in B(H)$ mit $||C|| < 1$.
Dann existiert $(E-C)^{-1} \in B(H)$.
Weiter ist $(E-C)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} C^k$ (Konvergenz in $B(H)$).

BEWEIS.

a)

$$\|(E-C)f\| = \|f - Cf\| \geq \|f\| - \|Cf\| \geq \|f\| - \|C\|\|f\| = \underbrace{(1-\|C\|)}_{>0}\|f\|$$

Wegen $\|C^*\| = \|C\| < 1$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \|(E-C)^*f\| = \|(\underbrace{E^*}_{=E} - C^*)f\| \overset{\text{analog}}{\geq} (1-\|C\|)\|f\| \\
&\overset{\text{Toeplitz}}{\Longrightarrow} \quad \exists (E-C)^{-1} \in B(H)
\end{aligned}$$

b) Es ist $\|C^2 f\| \leq \|C\|\|Cf\| \leq \|C\|^2\|f\|$
Induktiv $\|C^k\| \leq \|C\|^k$

Sei $M_n := \sum_{k=0}^{n} C^k$

$$(E-C)M_n = \sum_{k=0}^{n} C^k - \sum_{k=0}^{n} C^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} C^k - \sum_{k=1}^{n+1} C^k = C^0 - C^{n+1} = E - C^{n+1}$$

$$\begin{aligned} &\implies \quad M_n = (E-C)^{-1} - (E-C)^{-1}C^{n+1} \\ &\implies \quad \|(E-C)^{-1} - M_n\| = \|(E-C)^{-1}C^{n+1}\| \leq \underbrace{\|(E-C)^{-1}\|}_{<\infty} \underbrace{\|C\|}_{<1}^{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

□

LEMMA 3.7

Seien A_n, B_n, A, $B \in B(H)$ mit $A_n \to A$, $B_n \to B$ in $B(H)$.
Dann gilt:

$$A_n B_n \to AB$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \|A_nB_n - AB\| &\leq \|\underbrace{A_nB_n - A_nB}_{=A_n(B_n-B)}\| + \|\underbrace{A_nB - AB}_{=(A_n-A)B}\| \\ &\leq \underbrace{\|A_n\|}_{\leq C} \|B_n - B\| + \|A_n - A\|\|B\| \to 0 \end{aligned}$$

□

SATZ 3.8

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert (linear reicht), $z_0 \in \varrho(A)$.
Dann gilt

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < \|R(z_0)\|^{-1} \right\} \subset \varrho(A)$$

Insbesondere ist $\varrho(A)$ offen.
Weiter gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \|R(z_0)\|^{-1}$:

$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k R(z_0)^{k+1} \quad \textit{(Neumannsche Reihe)}$$

BEWEIS.
Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \|R(z_0)\|^{-1}$.
Sei $C := (z - z_0)R(z_0) \Longrightarrow \|C\| < 1$
Für $f \in D(A)$ ist

$$\begin{aligned}
(A-z)f &= (A-z_0)f - (z-z_0)f = (A-z_0)f - (z-z_0)(A-z_0)^{-1}(A-z_0)f \\
&= \left[E - (z-z_0)(A-z_0)^{-1}\right](A-z_0)f = (E-C)(A-z_0)f \\
\Longrightarrow \exists\, (A-z)^{-1} &= \underbrace{(A-z_0)^{-1}}_{\in B(H)}\underbrace{(E-C)^{-1}}_{\in B(H)} \in B(H)
\end{aligned}$$

Sei $g \in H$ und $f := (A - z_0)^{-1}(E - C)^{-1}g$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\quad f \in D(A) \text{ und } (A-z)f = (E-C)(A-z_0)(A-z_0)^{-1}(E-C)^{-1}g = g \\
&\Longrightarrow\quad R(A-zE) = H.
\end{aligned}$$

Also $z \in \varrho(A)$
Nach 3.6 ist

$$\begin{aligned}
(E-C)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k R(z_0)^k \\
R(z) &= R(z_0)(E-C)^{-1} = R(z_0)\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k R(z_0)^k \overset{3.7}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k R(z_0)^{k+1}
\end{aligned}$$

□

SATZ 3.9

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert.

*a) Seien $f, g \in H$ und $\Phi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch $\Phi(z) := \langle g, R(z)f \rangle$.
Dann ist Φ holomorph.*

*b) Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Dann gilt*

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}} \left\| \frac{R(z) - R(z_0)}{z - z_0} - R(z_o)^2 \right\|_{B(H)} = 0$$

BEWEIS.

b) Nach Satz 3.5 ist $\dfrac{R(z)-R(z_0)}{z-z_0} = R(z)R(z_0)$.

Nach 3.2 ist $\|R(z)\| \leq \dfrac{1}{|\Im z|} \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \|R(z)-R(z_0)\| \leq |z-z_0|\|R(z)\|\|R(z_0)\| \leq \frac{|z-z_0|}{|\Im z|\,|\Im z_0|}$$

Ist $|z-z_0| < \dfrac{1}{2}|\Im z_0|$

$$\Longrightarrow \quad |\Im z| = |\Im z_0 + \Im(z-z_0)| \geq |\Im z_0| - |z-z_0| > \frac{1}{2}|\Im z_0|$$
$$\Longrightarrow \quad \|R(z)-R(z_0)\| \leq \frac{2|z-z_0|}{|\Im z_0|^2} \to 0 \quad (z \to z_0)$$

Also

$$\begin{aligned} \left\| \frac{R(z)-R(z_0)}{z-z_0} - R(z_0)^2 \right\| &= \|R(z)R(z_0) - R(z_0)R(z_0)\| \\ &\leq \|R(z)-R(z_0)\|\|R(z_0)\| \to 0 \quad (z \to z_0) \end{aligned}$$

a)

$$\left| \frac{\Phi(z)-\Phi(z_0)}{z-z_0} - \langle g, R(z_0)^2 f\rangle \right| \overset{\text{Schwarz}}{\leq} \|g\| \left\| \frac{R(z)-R(z_0)}{z-z_0} - R(z_0)^2 \right\| \|f\| \to 0 \quad (z \to z_0)$$

□

SATZ 3.10

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert (linear reicht).

a) $R(\cdot, A) : \varrho(A) \to B(H)$ *ist stetig.*

b) Ist $\sigma(A) \neq \emptyset$, so ist $\|R(z)\| \geq [dist\,(z, \sigma(A))]^{-1} \quad \forall z \in \varrho(A)$

c) Ist $(z_n) \subset \varrho(A)$, $z_n \to z_0 \in \sigma(A) \Longrightarrow \|R(z_n)\| \to \infty$

BEWEIS.

a) Seien $z, z_0 \in \varrho(A)$, $|z - z_o| < \|R(z_0)\|^{-1}$

$$\Longrightarrow \|R(z) - R(z_0)\| \overset{3.8}{=} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |z - z_0|^k R(z_0)^{k+1} \right\| \overset{\lim \text{ in } \mathbb{R}}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} |z - z_0|^k \|R(z_0)\|^{k+1}$$
$$= \|R(z_0)\| \left(\frac{1}{1 - |z - z_0| \|R(z_0)\|} - 1 \right) \to 0 \quad (z \to z_0)$$

b) Ist $z \in \varrho(A)$, so gilt für $z' \in \mathbb{C}$ mit $|z - z'| < \|R(z)\|^{-1}$ nach 3.8: $z' \in \varrho(A)$
D. h. für $z' \in \sigma(A)$ gilt

$$|z' - z| \geq \|R(z)\|^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathit{dist}\,(z, \sigma(A)) = \inf \left\{ |z' - z| : z' \in \sigma(A) \right\} \geq \|R(z)\|^{-1}$$
$$\Longrightarrow \quad \|R(z)\| \geq \Big[\underbrace{\mathit{dist}\,(z, \sigma(A))}_{>0, \text{ da } \sigma(A) \text{ abgeschlossen}} \Big]^{-1}$$

c) folgt aus b)

□

SATZ 3.11

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert, $z_0 \in \varrho(A)$.
Dann gilt

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \left\| \frac{R(z) - R(z_0)}{z - z_0} - R(z_0)^2 \right\| = 0$$

BEWEIS.

$$\left\| \frac{R(z) - R(z_0)}{z - z_0} - R(z_0)^2 \right\| \overset{3.5}{=} \|R(z)R(z_0) - R(z_0)R(z_0)\| \leq \underbrace{\|R(z) - R(z_0)\|}_{\underset{3.10}{\to} 0} \|R(z_0)\| \to 0 \quad (z \to z_0)$$

□

SATZ 3.12

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert, $z \in \varrho(A)$.
Dann ist $z^* \in \varrho(A)$ und es gilt:

$$R(z)^* = R(z^*)$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\implies z^* = z \\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} &\implies z^* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \varrho(A) \end{aligned}$$

Es sind $R(z), R(z^*) \in B(H)$.
Seien $u, v \in H$ beliebig.

$$\begin{aligned} f &:= R(z)u \\ g &:= R(z^*)v \end{aligned}$$

$\implies f, g \in D(A)$

$$\langle R(z)u, v\rangle = \langle f, v\rangle = \langle f, (A - z^*)g\rangle = \langle (A - z)f, g\rangle = \langle u, R(z^*)v\rangle$$

$\implies$ Behauptung $\square$

4. Ein Störungssatz

DEFINITION 4.1

Seien T, S lineare Operatoren in H mit $D(T) \subset D(S)$.
*S heißt T-**beschränkt**, wenn es ein $c \geq 0$ gibt mit*

$$\|Sf\| \leq c(\|Tf\| + \|f\|) \quad \forall f \in D(T)$$

Ist S T-beschränkt, so heißt

$$\inf \{a \geq 0 : \exists b \geq 0 \textit{ mit } \|Sf\| \leq a\|Tf\| + b\|f\| \quad \forall f \in D(T)\}$$

*die T-**Schranke** von S.*

BEMERKUNG.
Ist c die T-Schranke von S, so braucht es zu c kein b zu geben mit $\|Sf\| \leq c\|Tf\| + b\|f\|$.

SATZ 4.2

(Rellich-Kato) Sei H komplexer Hilbertraum. Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert (bzw. wesentlich selbstadjungiert). Sei S hermitesch und D(A) $\subset$ D(S). Sei $0 \leq a < 1$, $b \geq 0$ mit

$$\|Sf\| \leq a\|Af\| + b\|f\| \quad \forall f \in D(A) \qquad (**)$$

Dann ist $A + S : D(A) \to H$ selbstadjungiert (bzw. wesentlich selbstadjungiert).

BEWEIS.

I) Sei A selbstadjungiert.

a) Für $f, g \in D(A)$ ist $\langle (A+S)f, g\rangle = \langle f, (A+S)g\rangle$ (da A,S hermitesch)
$\Longrightarrow A + S$ hermitesch

b) Sei $c \in \mathbb{R}$, $f \in D(A)$
$\Longrightarrow \|(A \pm ic)f\|^2 = \|Af\|^2 + |c|^2\|f\|^2 \pm \Re \underbrace{\langle Af, icf\rangle}_{=ic \underbrace{\langle Af, f\rangle}_{\in\mathbb{R}}}$

Also $\|(A \pm ic)f\|^2 = \|Af\|^2 + |c|^2\|f\|^2$

$$\begin{aligned}
\|Sf\|^2 &\leq (a\|Af\| + b\|f\|)^2 = a^2\|Af\|^2 + b^2\|f\|^2 + 2ab\|Af\|\|f\| \overset{2|\alpha\beta|\leq\varepsilon\alpha^2+\varepsilon^{-1}\beta^2}{\leq} \\
&\leq a^2(1+\varepsilon)\|Af\|^2 + b^2(1+\frac{1}{\varepsilon})\|f\|^2 = a^2(1+\varepsilon)\left[\|Af\|^2 + \frac{b^2(1+\frac{1}{\varepsilon})}{a^2(1+\varepsilon)}\|f\|^2\right]
\end{aligned}$$

Wähle $\varepsilon_0 > 0$ mit $a_0^2 := a^2(1+\varepsilon) < 1$
Wähle $c \in \mathbb{R}$ mit $c^2 = \dfrac{b^2(1+\frac{1}{\varepsilon_0})}{a^2(1+\varepsilon_0)}$
$\Longrightarrow \|Sf\| \leq a_0\|(A \pm ic)f\| \quad \forall f \in D(A)$

c) Angenommen, es ist $R\left((A+S) \pm icE\right) \subsetneq H$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{orthogonale}}{\underset{\text{Zerlegung}}{\Longrightarrow}} \quad \exists 0 \neq g \in H \text{ mit } \langle g, ((A+S) \pm icE)f\rangle = 0 \quad \forall f \in D(A) \\
ic \in \varrho(A) \quad &\Longrightarrow \quad \exists f_0 \in D(A) \text{ mit } g = (A \pm ic)f_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow 0 &= \langle (A \pm ic)f_0, ((A+S) \pm icE)f_0\rangle = \|(A \pm ic)f_0\|^2 + \langle (A \pm ic)f_0, Sf_0\rangle \\
&\geq \|(A \pm ic)f_0\|^2 - \|(A \pm ic)f_0\|\|Sf_0\| \overset{\text{b)}}{\geq} \|(A \pm ic)f_0\|^2 - a_0\|(A \pm ic)f_0\|^2 \\
&= \underbrace{(1-a_0)}_{>0}\|(A \pm ic)f_0\|^2 \overset{2.8}{\geq} (1-a_0)c^2\|f_0\|^2 \\
\Longrightarrow f_0 &= 0 \\
\Longrightarrow g &= 0 \quad \text{Widerspruch!}
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
R(\frac{1}{c}(A+S) \pm iE) = H \quad &\overset{\frac{1}{c}(A+S)\text{ hermitesch}}{\underset{c\in\mathbb{R},\ 2.11}{\Longrightarrow}} \quad \frac{1}{c}(A+S) \quad \text{selbstadjungiert} \\
&\underset{c\in\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \quad (A+S) \quad \text{selbstadjungiert}
\end{aligned}$$

II) Sei A wesentlich selbstadjungiert.

a) $A+S$ hermitesch wie in I) $\Longrightarrow$ $A+S$ abschließbar.

b) Seien $f, g \in D(\overline{S})$

$$\Longrightarrow \exists (f_n), (g_n) \subset D(S) : f_n \to f,\ g_n \to g,\ Sf_n \to \overline{S}f,\ Sg_n \to \overline{S}g$$

$$\langle \overline{S}f, g\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Sf_n, g\rangle = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\langle Sf_n, g_k\rangle = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\langle f_n, Sg_k\rangle = \langle f, \overline{S}g\rangle$$

$\Longrightarrow \overline{S}$ hermitesch

c) <u>Zeige</u>: $D(\overline{A+S}) = D(\overline{A})$

Sei $f \in D(\overline{A+S})$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \exists (f_n) \subset D(A+S) = D(A) \text{ mit } f_n \to f \text{ und } (A+S)f_n \to (\overline{A+S})f_n \\
&\Longrightarrow \quad \|A(f_n - f_m)\| \le \|(A+S)(f_n - f_m)\| + \|S(f_n - f_m)\| \\
&\qquad\quad \le |(A+S)(f_n - f_m)\| + a\|A(f_n - f_m)\| + b\|f_n - f_m\| \\
&\Longrightarrow \quad \underbrace{(1-a)}_{>0}\|A(f_n - f_m)\| \le \|(A+S)(f_n - f_m)\| + \|f_n - f_m\| \to 0 \\
&\Longrightarrow \quad f_n \to f \text{ und } (Af_n) \text{ Cauchy-Folge} \\
&\overset{\text{Def. } \overline{A}}{\Longrightarrow} \quad f \in D(\overline{A})
\end{aligned}$$

Sei $f \in D(\overline{A})$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \exists (f_n) \subset D(A),\ f_n \to f,\ Af_n \to \overline{A}f \\
&\overset{(**)}{\Longrightarrow} \quad (Sf_n) \text{ Cauchy-Folge} \\
&\Longrightarrow \quad ((A+S)f_n) \text{ Cauchy-Folge} \\
&\Longrightarrow \quad f \in D(\overline{A+S})
\end{aligned}$$

<u>Zeige</u>: $\overline{A+S} = \overline{A} + \overline{S}$

Sei $f \in D(\overline{A}) = D(\overline{A+S}) = D(\overline{A} + \overline{S})$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \exists (f_n) \subset D(A) : Af_n \to \overline{A}f,\ f_n \to f \\
&\overset{(**)}{\Longrightarrow} \quad (Sf_n) \text{ Cauchy-Folge} \\
&\Longrightarrow \quad Sf_n \to \overline{S}f \\
&\Longrightarrow \quad (\overline{A} + \overline{S})f = \lim_{n\to\infty} (A+S)f_n = (\overline{A+S})f
\end{aligned}$$

d) Sei $f \in D(\overline{A})$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \exists (f_n) \subset D(A),\ f_n \to f,\ Af_n \to \overline{A}f \\
&\overset{(**)}{\Longrightarrow} \quad (Sf_n) \text{ Cauchy-Folge} \\
&\Longrightarrow \quad Sf_n \to \overline{S}f
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\|Sf_n\| \le & a\|Af_n\| & + b\|f_n\| & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
\|\overline{S}f\| \le & a\|\overline{A}f\| & + b\ \|f\| & & \forall f \in D(\overline{A})
\end{array}$$

e) Also: $\overline{A}$ selbstadjungiert, $\overline{S}$ hermitesch, $D(\overline{A}) \subset D(\overline{S})$, $\|\overline{S}f\| \le a\|\overline{A}f\| + b\|f\|$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{I)}}{\Longrightarrow} \quad \overline{A} + \overline{S} \text{ selbstadjungiert} \\
&\Longrightarrow \quad \overline{A+S} \text{ selbstadjungiert}
\end{aligned}$$

Also $A+S$ wesentlich selbstadjungiert.

$\square$

5. Anwendung: Schrödinger-Operatoren

Sei $n \geq 2,\ H = L^2(\mathbb{R}^n),\ \mathbb{K} = \mathbb{C},\ D(L_0) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $L_0 u := -\Delta u$ für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Dann ist L_0 wesentlich selbstadjungiert (siehe Beispiel).

L_0 heißt freier oder ungestörter Hamilton- bzw. Schrödinger-Operator.

Abschließung von L_0?

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|^2 &:= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \partial_j u^* \partial_j u \; dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u^*(-\Delta u) \; dx = \langle u, -\Delta u\rangle \leq \|u\| \| - \Delta u\| \overset{|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{\varepsilon^{-1}}{2}b^2}{\leq} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 + \frac{\varepsilon^{-1}}{2}\|\Delta u\|^2 \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

Weiter für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^n \|\partial_j \partial_k u\|^2 &= \sum_{j,k=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_j \partial_k u^* \partial_j \partial_k u \; dx = - \sum_{j,k=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_k u^* \partial_j \partial_j \partial_k u \; dx = \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_k \partial_k u^* \partial_j \partial_j u \; dx = \|\Delta u\|^2
\end{aligned}$$

Also

$$\|u\|^2 + \underbrace{\sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|^2}_{=\|\nabla u\|^2} + \sum_{j,k=1}^n \|\partial_j \partial_k u\|^2 \overset{\varepsilon=1}{\leq} \|u\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2 + \|\Delta u\|^2 = \frac{3}{2}(\|u\|^2 + \|\Delta u\|^2)$$

Führe auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ als Skalarprodukt ein

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle_0 &:= \int\limits_{\mathbb{R}^n} u^* v \; dx \\
\langle u, v\rangle_2 &:= \langle u, v\rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle \partial_j u, \partial_j v\rangle_0 + \sum_{j,k=1}^n \langle \partial_j \partial_k u, \partial_j \partial_k v\rangle_0 \\
\|u\|_2 &:= \sqrt{\langle u, u\rangle_2} \\
\Longrightarrow \|u\|_2 &\leq \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\|u\|_0^2 + \|\Delta u\|_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (*)
\end{aligned}$$

Ist nun $u \in D(\overline{L_0})$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \exists (u_v) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|u-u_v\|_0 \to 0,\ (-\Delta u_v) \text{ Cauchy-Folge in } L^2(\mathbb{R}^n)\\
&\overset{(*)}{\Longrightarrow} (u_v) \text{ Cauchy-Folge in } \|\cdot\|_2\text{-Norm}\\
&\Longrightarrow (\partial_j u_v),\ (\partial_j\partial_k u_v) \text{ Cauchy-Folgen in } L^2(\mathbb{R}^n)\\
&\Longrightarrow \exists v_j \in L^2(\mathbb{R}^n),\ v_{jk} \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \partial_j u_v \to v_j,\ \partial_j\partial_k u_v \to v_{jk} \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

Für $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ folgt

$$\langle v_j, \Phi\rangle_0 = \int v_j^*\Phi\,dx = \lim_{v\to\infty}\int \partial_j u_v^*\Phi\,dx = -\lim_{v\to\infty}\int u_v^*\partial_j\Phi\,dx = -\int u^*\partial_j\Phi\,dx = -\langle u, \partial_j\Phi\rangle_0$$

Analog $\langle v_{jk}, \Phi\rangle_0 = \langle u, \partial_j\partial_k\Phi\rangle_0$
Insbesondere

$$\langle -\sum_{j=1}^n v_{jj}, \Phi\rangle_0 = -\sum_{j=1}^n\langle v_{jj}, \Phi\rangle = -\sum_{j=1}^n\langle u, \partial_j\partial_j\Phi\rangle_0 = \langle u, -\Delta\Phi\rangle$$

$$\overset{\text{Def. } \overline{L_0}}{\Longrightarrow} \overline{L_0}u = -\sum_{j=1}^n v_{jj}$$

DEFINITION 5.1

Wir nennen

$$W^{2,2}(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \forall\alpha\in\mathbb{N}_0^2\ \exists u_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \langle u_\alpha, \Phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha\Phi\rangle \quad \forall\Phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

den ***Sobolevraum*** *von $L^2(\mathbb{R}^n)$-Funktionen, die schwache Ableitungen bis 2. Ordnung in $L^2(\mathbb{R}^n)$ besitzen. Mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ ist $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ Hilbertraum über $\mathbb{C}$.*

BEWEIS. Sei $(u^{(j)}) \subset W^{2,2}(\mathbb{R}^n),\ \|u^{(j)} - u^{(k)}\|_2 \to 0 \quad (j,k\to\infty)$

$$\Longrightarrow \exists u, u_l, u_{lk} \in L^2(\mathbb{R}^n):\ u^{(j)} \to u,\ \partial_l u^{(j)} \to u_l,\ \partial_j\partial_k u^{(j)} \to u_{lk} \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\langle u_l, \Phi\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle\partial_j u^{(j)}, \Phi\rangle = -\lim_{j\to\infty}\langle u^{(j)}, \partial_l\Phi\rangle = -\langle u, \partial_l\Phi\rangle \quad \forall\Phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Analog $\langle u_{lk}, \Phi\rangle = \langle u, \partial_l\partial_k\Phi\rangle$

$$\Longrightarrow u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n),\ u^{(j)} \to u \text{ in } W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$$

$\square$

DEFINITION 5.2

Sei $0 < \varrho < n,\ q := \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *Lebesgue-meßbar.*
Sei

$$M_{q,\varrho}(x) := \int\limits_{B_1(x)} \frac{|q(y)|^2}{|x-y|^{n-\varrho}}\ dy \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Für $0 < \varrho < n$ *sei*

$$M_\varrho := \{q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid q \text{ meßbar und } M_{q,\varrho} \text{ beschränkt in } \mathbb{R}^n\}$$

Für $q \in M_\varrho$ *sei*

$$\|q\|_{M_\varrho} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} M_{q,\varrho}(x)$$

LEMMA 5.3

Sei

$$S(z) := \begin{cases} \frac{1}{(n-2)w_n}|z|^{2-n} & z \neq 0, n \geq 3 \\ -\frac{1}{2\pi}\ln|z| & z \neq 0, n = 2 \\ 0 & z = 0, n \geq 2 \end{cases}$$

Dann gilt für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} S(x-y)(-\Delta u)(y)\ dy$$

BEWEIS. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

$$\begin{aligned} R_1 &:= 2\mathrm{dist}(x, \operatorname{supp} u) + 2\mathrm{diam}(\operatorname{supp} u) \\ R_2 &:= 3\sup\{y \in \mathbb{R}^n :\ y \in \operatorname{supp} u\} \\ R_0 &:= \max(R_1, R_2) \end{aligned}$$

Sei $0 < \varepsilon < R_0$ und für $\varepsilon \leq r \leq R_0$:

$$\varphi(r) := \int\limits_{S_{n-1}} u(x + r\zeta)\ d\omega_\zeta$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow -\varphi(\varepsilon) \quad &= \quad \underbrace{\varphi(R_0)}_{=0} - \varphi(\varepsilon) = \int\limits_\varepsilon^{R_0} \varphi'(r)\ dr \overset{\text{Ana IV}}{\underset{\text{Blatt 1}}{=}} \int\limits_\varepsilon^{R_0} \int\limits_{S_{n-1}} \sum_{i=1}^n (\partial_i u)(x + r\zeta)\zeta_i\ d\omega_\zeta\ dr = \\ &\overset{\text{Polar-}}{\underset{\text{koordinaten}}{=}} \int\limits_{\{\varepsilon \leq |y| \leq R_0\}} \frac{1}{|y|^{n-1}} \sum_{i=1}^n (\partial_i u)(x+y) \frac{y_i}{|y|}\ dy \end{aligned}$$

Es ist für $n \geq 3$:

$$\partial_i(|y|^{2-n}) = (2-n)|y|^{1-n}\frac{y_i}{|y|} = (2-n)|y|^{-n}y_i$$

$\Longrightarrow$ Für $n \geq 3$ ist

$$\begin{aligned}
-\varphi(\varepsilon) &= \int\limits_{\{\varepsilon\leq|y|\leq R_0\}} \frac{1}{2-n}\sum_{i=1}^n \partial_i|y|^{2-n}(\partial_i u)(x+y)\,dy = \\
&= \sum_{i=1}^n \int\limits_{\{\varepsilon\leq|y|\leq R_0\}} \frac{1}{2-n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left[|y|^{2-n}(\partial_i u)(x+y)\right]\,dy \\
&\quad -\sum_{i=1}^n \int\limits_{\{\varepsilon\leq|y|\leq R_0\}} \frac{1}{2-n}|y|^{2-n}(\partial_i\partial_i u)(x+y)\,dy = \\
&= \underbrace{\int\limits_{\{|y|=r\}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2-n}|y|^{2-n}\frac{y_i}{|y|}(\partial_i u)(x+y)\,d\omega_y\Bigg|_{r=\varepsilon}^{r=R_0}}_{=:I_3(\varepsilon)-I_1(\varepsilon)} \\
&\quad \underbrace{-\int\limits_{\{y:\varepsilon<|y|<R_0\}} \frac{1}{2-n}|y|^{2-n}(\Delta u)(x+y)\,dy}_{=:I_2(\varepsilon)} \\
I_3(\varepsilon) &= \int\limits_{\{|y|=R_0\}} \frac{1}{2-n}|y|^{2-n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{|y|}\underbrace{(\partial_i u)(x+y)}_{=0}\,d\omega_y = 0 \\
I_1(\varepsilon) &\overset{\text{Polar-}}{\underset{\text{koordinaten}}{=}} \frac{1}{2-n}\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{2-n}\int\limits_{S_{n-1}}\sum_{i=1}^n \zeta_i(\partial_i u)(x+\varepsilon\zeta)\,d\omega_\zeta
\end{aligned}$$

Sei $M := \sup\limits_{z\in\mathbb{R}^n} |\nabla u(z)|$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\quad |\sum_{i=1}^n \zeta_i(\partial_i u)(x+\varepsilon\zeta)| \overset{\text{Schwarz}}{\underset{\text{für }\sum}{\leq}} \underbrace{|\zeta|}_{=1}\,|(\nabla u)(x+\varepsilon\zeta)| \leq M \\
&\Longrightarrow\quad |I_1(\varepsilon)| \leq \frac{1}{n-2}\varepsilon M\omega_n \to 0 \quad (\varepsilon\to 0)
\end{aligned}$$

Sei $N := \max\limits_{z\in\mathbb{R}^n} |(\Delta u)(z)|$
$\Longrightarrow$ Für $h(z) := \frac{N}{n-2}|z|^{2-n} \in L^1(B_{R_0})$ (Polarkoordinaten) gilt:

$$\left|\chi_{B_{R_0}\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{2-n}|y|^{2-n}(\Delta u)(x+y)\right| \leq h(y), \quad 0<|y|\leq R_0$$

$$\overset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow} I_2(\varepsilon) \quad \to \quad - \int\limits_{B_{R_0}\setminus\{0\}} \frac{1}{2-n}|y|^{2-n}(\Delta u)(x+y)\ dy \overset{x+y=z}{\underset{y=z-x}{=}}$$

$$= \int\limits_{\{z\colon 0<|z-x|<R_0\}} \frac{1}{2-n}|z-x|^{2-n}(\Delta u)(z)\ dz = \omega_n \int\limits_{\mathbb{R}^n} S(x-z)(\Delta u)(z)\ dz$$

$$\varphi(\varepsilon) = \int\limits_{S_{n-1}} u(x+\varepsilon\zeta)\ d\omega_\zeta = \underbrace{\int\limits_{S_{n-1}} u(x)\ d\omega_\zeta}_{=u(x)\omega_n} + \int\limits_{S_{n-1}} \left[u(x+\varepsilon\zeta) - u(x)\right]\ d\omega_\zeta$$

$$\Longrightarrow |\varphi(\varepsilon) - u(x)\omega_n| \leq \int\limits_{S_{n-1}} \max_{\{|z|\leq\varepsilon\}} |u(x+z)-u(x)|\ d\omega_\zeta = \omega_n \max_{\{|z|\leq\varepsilon\}} |u(x+z)-u(x)| \to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$$

Es ist $-\varphi(\varepsilon) = I_3(\varepsilon) - I_1(\varepsilon) + I_2\varepsilon$

$$\overset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow} -u(x)\omega_n = \omega_n \int S(x-z)(\Delta u)(z)\ dz$$

Für $n=2$ geht alles genauso, da $\partial_i(\ln|y|) = \frac{1}{|y|}\frac{y_i}{|y|}$, d.h. es ist überall $\frac{1}{2-n}|y|^{2-n}$ durch $\ln|y|$ zu ersetzen

$$\overset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow} \underbrace{\varphi(R_0)}_{=0} - \varphi(\varepsilon) \quad = \quad \underbrace{-\int\limits_{\{|y|=\varepsilon\}} \ln|y| \sum_{i=1}^{2} \frac{y_i}{|y|}(\partial_i u)(x+y)\ d\omega_\zeta}_{=:\mathcal{J}_\varepsilon} - \int\limits_{\{\varepsilon<|z|<R_0\}} \ln|z|(\Delta u)(x+z)\ dz$$

$$\text{und } |\mathcal{J}_\varepsilon| \quad \leq \quad \varepsilon|\ln\varepsilon| \int\limits_{S_1} \sum_{i=1}^{2} |\zeta_i(\partial_i u)(x+\varepsilon\zeta)|\ d\omega_\zeta \overset{\text{s.o.}}{\leq} \varepsilon|\ln\varepsilon| M\omega_2 \to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$$

(vgl. Ana I) □

SATZ 5.4

Sei $n \geq 3,\ 0 < \varrho < \min(n,4)$. Sei $q \in M_\varrho$.
Dann gibt es zu jedem $a > 0$ ein $\mathcal{K}_a > 0$ mit

$$\|qu\| \leq a\|\Delta u\| + \mathcal{K}_a\|u\| \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

BEWEIS. Sei $\sigma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ 0 \leq \sigma \leq 1,\ \sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für} \quad |x| \geq 2 \end{cases}$

Für $\eta > 0$ sei $\sigma_\eta(x) := \sigma(\frac{x}{\eta}) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| \leq \eta \\ 0 & \text{für} \quad |x| \geq 2\eta \end{cases}$

$\exists K > 0 : \ \| \bigtriangledown \sigma(z) \| \leq K \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \| \bigtriangledown \sigma_\eta(z) \| \quad &\leq \quad \begin{cases} \frac{K}{\eta} & \text{für} \quad \eta \leq |z| \leq 2\eta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ | \bigtriangleup \sigma_\eta(z) | \quad &\leq \quad \begin{cases} \frac{K}{\eta^2} & \text{für} \quad \eta \leq |z| \leq 2\eta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig, aber fest.
Sei $v(x) := u(x) \cdot \sigma_\eta(x - x_0) \Longrightarrow v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$
Nach Lemma 5.3 (angewendet auf v) ist

$$u(x)\sigma_\eta(x - x_0) = \underbrace{\frac{1}{(n-2)\omega_n}}_{=:c_0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{- \bigtriangleup_y \left(u(y)\sigma_\eta(y - x_0)\right)}{|y - x|^{n-2}} dy$$

Es ist

$$\begin{aligned} \partial_i(f \cdot g) \quad &= \quad (\partial_i f) \cdot g + f(\partial_i g) \\ (\partial_i\partial_i)(f \cdot g) \quad &= \quad (\partial_i\partial_i)g + 2(\partial_i f)(\partial_i g) + f(\partial_i\partial_i g) \\ \Longrightarrow \bigtriangleup(f \cdot g) \quad &= \quad (\bigtriangleup f) \cdot g + 2(\bigtriangledown f) \cdot (\bigtriangledown g) + f \cdot \bigtriangleup g \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} u(x)\sigma_\eta(x - x_0) \quad = \quad c_0 \int \frac{1}{|x - y|^{n-2}} \Big[&(- \bigtriangleup u)(y)\sigma_\eta(y - x_0) \\ &-2 \bigtriangledown u(y) \cdot \bigtriangledown_y \sigma_\eta(y - x_0) - u(y) \bigtriangleup_y \sigma_\eta(y - x_0) \Big] \, dy \end{aligned}$$

Setze nun $x = x_0$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \frac{u(x)}{c_0} \quad = \quad &\underbrace{\int \frac{(- \bigtriangleup u(y)\sigma_\eta(y - x)}{|y - x|^{n-2}} dy}_{=:I_1(x)} + \underbrace{\int \frac{u(y) \bigtriangleup_y \sigma_\eta(y - x)}{-|y - x|^{n-2}} dy}_{=:I_2(x)} + \\ &+2 \underbrace{\int \frac{\bigtriangledown u(y) \cdot \bigtriangledown_y \sigma_\eta(y - x)}{-|y - x|^{n-2}} dy}_{=:I_3(x)} \end{aligned}$$

I_2: Sei $\chi_\eta(z) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \eta \leq |z| \leq 2\eta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\begin{aligned} |I_2(x)| \quad &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|}{|x - y|^{n-2}} \frac{K}{\eta^2} \chi_\eta(y - x) \, dy \\ \frac{1}{\eta} \quad &\leq \quad \frac{2}{|x - y|} \leq \underbrace{4K}_{=:c_2} \int \frac{|u(y)|}{|x - y|^n} \chi_\eta(y - x) \, dy \end{aligned}$$

I_3:

$$I_3(x) \overset{\text{Ana III}}{\underset{\text{Blatt 10}}{=}} 2\int u(y)\sum_{i=1}^{n} \partial y_i \sigma_\eta(y-x)\partial y_i |y-x|^{2-n}\,dy$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}|y-x|^{2-n} = (2-n)|y-x|^{1-n}\frac{y_j-x_j}{|y-x|} = (2-n)\frac{y_j-x_j}{|y-x|^n}$$

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \underbrace{|\partial y_i\sigma_\eta(y-x)|}_{\le \frac{K}{\eta}\chi_\eta(y-x)}\partial y_i|y-x|^{2-n}\Big| \le (n-2)\frac{K}{\eta}\chi_\eta(y-x)\sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i-x_i|}{|y-x|^n} \overset{\frac{1}{\eta}\le\frac{2}{|y-x|}}{\underset{\text{Schwarz für }\Sigma}{\le}}$$

$$\le 2(n-2)K\sqrt{n}\frac{\chi_\eta(y-x)}{|y-x|^n}$$

$$\Longrightarrow |I_3(x)| \le \underbrace{4(n-2)\cdot K\cdot\sqrt{n}}_{=:c_3}\int\frac{|u(y)|}{|y-x|^n}\chi_\eta(y-x)\,dy$$

$$\overset{j=2,3}{\Longrightarrow} |I_j(x)| \le c_j\int\frac{\chi_\eta^{1/2}(y-x)}{|y-x|^{\frac{n+\varrho}{2}}}\frac{\chi_\eta^{1/2}(y-x)}{(y-x)^{\frac{n-\varrho}{2}}}|u(y)|\,dy \le$$

$$\le c_j\left(\int\frac{\chi_\eta(y-x)}{|y-x|^{n+\varrho}}dy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\frac{\chi_\eta(y-x)}{|y-x|^{n-\varrho}}|u(y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int\frac{\chi_\eta(y-x)}{|y-x|^{n+\varrho}}dy = \int\limits_{\{\eta\le|z|\le2\eta\}}\frac{\chi_\eta(z)}{|z|^{n+\varrho}}dz = \int\limits_{\eta}^{2\eta} r^{n-1-n-\varrho}\,dr\omega_n = \frac{1}{-\varrho}\omega_n\left((2\eta)^{-\varrho}-\eta^{-\varrho}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\omega_n}{\varrho}(1-2^{-\varrho})\eta^{-\varrho}}_{=:K_2(\varrho)}\eta^{-\varrho}$$

$$\Longrightarrow |I_j(x)| \le c_jK_2(\varrho)^{\frac{1}{2}}\left(\int\frac{\chi_\eta(y-x)}{|y-x|^{n-\varrho}}|u(y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}\eta^{-\frac{\varrho}{2}},\ j=2,3$$

$$\|q\cdot I_j\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n}|q(x)|^2|I_j(x)|^2dx \le c_j^2K_2(\varrho)\eta^{-\varrho}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|q(x)|^2\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(y)|^2\chi_\eta(y-x)}{|y-x|^{n-\varrho}}dydx =$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} c_j^2K_2(\varrho)\eta^{-\varrho}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^2\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|q(x)|^2\chi_\eta(y-x)}{|y-x|^{n-\varrho}}dxdy}_{\le\int\limits_{\eta\le\frac{1}{2}B_1(y)}\frac{|q(x)|^2}{|y-x|^{n-\varrho}}dx} \le c_j^2K_2(\varrho)n^{-\varrho}\|q\|_{u_\varrho}\|u\|^2$$

$$\Longrightarrow \|qI_j\| \le c_jK_2(\varrho)^{\frac{1}{2}}\eta^{-\frac{\varrho}{2}}\|q\|_{u_\varrho}^{\frac{1}{2}}\|u\|,\ j=2,3$$

I_1 : Sei $\widetilde{\chi_\eta}(z) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |z| \leq 2\eta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow |I_1(x)| &\leq \int \frac{\widetilde{\chi_\eta}(y-x)(\triangle u)(y)}{|y-x|^{n-2}} dy = \int \frac{\widetilde{\chi_\eta}(y-x)^{\frac{1}{2}}}{|y-x|^{\frac{n+\varrho-4}{2}}} \frac{\widetilde{\chi_\eta}(y-x)^{\frac{1}{2}} |\triangle u(y)|}{|y-x|^{\frac{n-\varrho}{2}}} dy \leq \\
&\leq \left(\int \frac{\widetilde{\chi_\eta}(y-x)\, dy}{|y-x|^{n+\varrho-4}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \frac{\widetilde{\chi_\eta}(y-x)}{|y-x|^{n-\varrho}} |\triangle u(y)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\widetilde{\chi_\eta}(y-x)}{|y-x|^{n+\varrho-4}} dy &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\widetilde{\chi_\eta}(z)}{|z|^{n+\varrho-4}} dz = \int\limits_0^{2\eta} r^{n-1} \cdot r^{-n-\varrho+4}\, dr\omega_n = \omega_n \int\limits_0^{2\eta} r^{3-\varrho}\, dr = \\
&= \frac{\omega_n}{4-\varrho} r^{4-\varrho} \Big|_0^{2\eta} \underset{\varrho<4}{=} \frac{\omega_n}{4-\varrho}(2\eta)^{4-\varrho} = \underbrace{\frac{\omega_n}{4-\varrho} 2^{4-\varrho}}_{=:K_1(\varrho)} \eta^{4-\varrho}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow |I_1(x)| &\leq K_1(\varrho)^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{4-\varrho}{2}} \left(\int \frac{\widetilde{\chi_\eta}(y-x)}{|y-x|^{n-\varrho}} |(\triangle u)(y)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
\Longrightarrow \|qI_1\|^2 &\leq K_1(\varrho)\eta^{4-\varrho} \int |q(x)|^2 \int \frac{|\triangle u(y)|^2}{|y-x|^{n-\varrho}} \widetilde{\chi_\eta}(y-x)\, dydx = \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} K_1(\varrho)\eta^{4-\varrho} \int |\triangle u(y)|^2 \underbrace{\frac{|q(x)|^2}{|y-x|^{n-\varrho}} \widetilde{\chi_\eta}(y-x)\, dxdy}_{\underset{\text{s.o.}}{\overset{\eta\leq\frac{1}{2}}{\leq}} \|q\|_{u_\varrho}} \leq \\
&\leq K_1(\varrho)\eta^{4-\varrho} \|q\|_{u_\varrho} \|\triangle u\|^2
\end{aligned}$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned}
\|qu\| &= c_0 \|q(I_1 + I_2 + I_3)\| \leq c_0(\|qI_1\| + \|qI_2\| + \|qI_3\|) \leq \\
&\leq c_0 K_1(\varrho)^{\frac{1}{2}} \|q\|^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{4-\varrho}{2}} \|\triangle u\| + c_0(c_2 + c_3) \left(K_2(\varrho)\eta^{-\varrho}\|q\| \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|
\end{aligned}$$

Ist $a > 0$ gegeben, so wähle

$$\eta_0 := \min \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{a}{c_0 K_1(\varrho)^{\frac{1}{2}} \|q\|_{U_\varrho}^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{2}{4-\varrho}} \right)$$

und setze

$$K_a := c_0(c_2 + c_3) \left(K_2(\varrho)\eta_0^{-\varrho} \|q\|_{u_\varrho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\square$

DEFINITION 5.5

Sei H Hilbertraum, $A : D(A) \to H$ hermitesch.
A heißt ***halbbeschränkt nach unten****, wenn es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt mit $\langle Au, u \rangle \geq \gamma \|u\|^2 \quad \forall u \in D(A)$.*

BEMERKUNG. $\langle A+\lambda u, u\rangle = \langle Au, u\rangle + \langle \lambda u, u\rangle \geq \gamma \|u\|^2 + \lambda \|u\|^2 = (\lambda+\gamma)\|u\|^2$
Ist $\lambda > -\gamma \quad \Longrightarrow \quad \lambda+\gamma > 0$ und $\|(A+\lambda)u\| \geq (\lambda+\gamma)\|u\|$

6. Die Spektralschar

DEFINITION 6.1

Eine Abb. $E : \mathbb{R} \to B(H)$ *heißt* ***Spektralschar****, falls*

1) *Für jedes* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ist* $E(\lambda)$ *ein Projektor*
2) $E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda, \mu)) \quad \forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$
3) $\forall f \in H \, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:* $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} (\lambda + \varepsilon) f = E(\lambda) f$
4) $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E(\lambda) f = 0, \quad \lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda) f = f \quad \forall f \in H$

SATZ 6.2

Sei $E : \mathbb{R} \to B(H)$ *eine Spektralschar. Dann gilt:*

$$E(\lambda)E(\mu) = E(\mu)(\lambda) \quad \forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$$

BEWEIS. $E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda, \mu)) = E(\mu)E(\lambda)$ □

DEFINITION 6.3

Sei $E : \mathbb{R} \to B(H)$ *Spektralschar,* $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$*.*
Dann setze

$$E(I) := E(b) - E(a)$$

SATZ 6.4

Sei $E : \mathbb{R} \to B(H)$ Spektralschar

1) *Ist $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$, so ist $E(I)$ ein Projektor*

2) *Sind $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle, mit $\overset{\circ}{I_1} \cap \overset{\circ}{I_2} = \emptyset$, so gilt $E(I_1)E(I_2) = 0$.*

BEWEIS.

1) $E(I)$ hermitesch klar

$$\begin{aligned} E(I)^2 &= (E(b)-E(a))(E(b)-E(a)) = E(b)^2 - E(b)E(a) - E(a)E(b) + E(a)^2 = \\ &\overset{\text{Def.}}{=} E(b) - \underbrace{E(\min(a,b))}_{=E(a)} - \underbrace{E(\min(a,b))}_{=E(a)} + E(a) = E(b) - E(a) = \\ &= E(I) \end{aligned}$$

2) Sei $I_1 = [a,b]$, $I_2 = [c,d]$ o.E. $a < b \leq c < d$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow E(I_1)E(I_2) &= (E(b)-E(a))(E(d)-E(c)) = \\ &= E(b)E(d) - E(b)E(c) - E(a)E(d) + E(a)E(c) = \\ &= E(b) - E(b) - E(a) + E(a) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

LEMMA 6.5

Sei $E:\mathbb{R}\to B(H)$ *Spektralschar,* $I:=[a,b]\subset\mathbb{R}$.
Sei $f:I\to\mathbb{C}$ *stetig und* $\varepsilon>0$, $\delta>0$ *mit* $|f(\lambda_1)-f(\lambda_2)|\le\varepsilon \quad \forall\ |\lambda_1-\lambda_2|\le\delta \quad \lambda_1,\lambda_2\in I$.
Seien

$$\begin{aligned} z' &:= a=\lambda'_1<\lambda'_2<\cdots<\lambda'_{m+1}=b \\ z'' &:= a=\lambda''_1<\lambda''_2<\cdots<\lambda''_{n+1}=b \end{aligned}$$

zwei Zerlegungen von I *mit*

$$\begin{aligned} &|\lambda'_{i+1}-\lambda'_i|\le\delta \quad \forall i=1,\dots,m \\ \textit{und}\quad &|\lambda''_{k+1}-\lambda'_k|\le\delta \quad \forall k=1,\dots,n \end{aligned}$$

Weiter sei

$$\begin{aligned} T' &:= \sum_{i=1}^{m} f(\lambda^*_i)(E(\lambda'_{i+1})-E(\lambda'_i) \textit{ mit } \lambda^*_i\in[\lambda'_i,\lambda'_{i+1}] \\ T'' &:= \sum_{k=1}^{n} f(\lambda^{**}_k)(E(\lambda''_{k+1})-E(\lambda''_k) \textit{ mit}; \lambda^{**}_k\in[\lambda''_k,\lambda''_{k+1}] \end{aligned}$$

Dann sind $T',T''\in B(H)$ *und* $\|T'-T''\|_{B(H)}\le 2\varepsilon$

BEWEIS. Sei z''' die gemeinsame Verfeinerung von z' und z'', d.h. betrachte

$$\bigcup_{i=1}^{m+1}\{\lambda'_i\}\cup\bigcup_{k=1}^{n+1}\{\lambda''_k\}$$

und zähle die p.w. verschiedenen der Größe nach ab, erhalte

$$z''':=a=\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{r+1}=b$$

Setze $T''':=\sum_{j=1}^{r} f(\lambda_j)(E(\lambda_{j+1})-E(\lambda_j))$

Es ist

$$\begin{aligned} T' &= \sum_{i=1}^{m} f(\lambda^*_i)\sum_{\{j:\lambda_j\in[\lambda'_i,\lambda'_{i+1}[\}} E(\lambda_{j+1})-E(\lambda_j) \\ T''' &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{\{j:\lambda_j\in[\lambda'_i,\lambda'_{i+1}[\}} f(\lambda_j)(E(\lambda_{j+1})-E(\lambda_j)) \\ \Longrightarrow T'-T''' &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{\{j:\lambda_j\in[\lambda'_i,\lambda'_{i+1}[\}} (f(\lambda^*_i)-f(\lambda_j))(E(\lambda_{j+1})-E(\lambda_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{r}\varepsilon_j E(I_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{mit}\quad I_j:=[\lambda_j,\lambda_{j+1}] \\ &\text{und}\quad \varepsilon_j:=f(\lambda^*_i)-f(\lambda_j) \quad \text{falls} \quad \lambda_j\in[\lambda'_i,\lambda'_{i+1}[\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \|(T' - T''')f\|^2 = \langle \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j E(I_j), \sum_{l=1}^{r} \varepsilon_l E(I_l) \rangle = \sum_{j,l=1}^{r} \varepsilon_j^* \varepsilon_l \underbrace{E(I_j)f, E(I_l)f}_{=\langle E(I_l)E(I_j)f,f\rangle}$$

Es ist $E(I_i)E(I_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \text{ und 6.4b)} \\ E(I_j) & \text{falls } i = j \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \|(T' - T''')f\|^2 \quad &= \quad \sum_{j=1}^{r} |\varepsilon_j|^2 \underbrace{E(I_j)f, f}_{\geq 0} \leq \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{r} \langle (E(\lambda_{j+1}) - E(\lambda_j))f, f \rangle \\
&\underset{\text{summe}}{\overset{\text{Teleskop-}}{=}} \quad \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{r} \langle \underbrace{(E(b) - E(a))}_{E(I) \text{ Projektor}} f, f \rangle = \varepsilon^2 \|E(I)f\|^2 \leq \\
&\underset{\|E(I)\|=1}{\leq} \quad \varepsilon^2 \|f\|^2
\end{aligned}$$

Analog $\|T'' - T''\| \leq \varepsilon$ $\square$

SATZ 6.6

Sei $E : \mathbb{R} \to B(H)$ Spektralschar, $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $\varphi := I \to \mathbb{R}$ stetig.
Sei $Z^{(n)} := a = \lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \cdots < \lambda_{k_n+1}^{(n)} = b$ eine Zerlegungsfolge von $[a, b]$
mit $\max\limits_{j=1,\ldots,k_n} \left| \lambda_{j+1}^{(n)} . \lambda_j^{(n)} \right| \to 0 \quad (n \to \infty)$
Sei $T_j^{(n)} := [\lambda_j^{(n)}, \lambda_{j+1}^{(n)}], \quad j = 1, \ldots, k_n$ und $T_n := \sum\limits_{j=1}^{k_n} \varphi(\lambda_j^{(n)}) E(I_j^{(n)})$
Dann gibt es genau ein $T \in B(H)$mit $\|T - T_n\|_{B(H)} \underset{(n\to\infty)}{\to} 0$.
Wir setzen

$$\varphi(E, I) := \int_I \varphi(\lambda)\, dE(\lambda) := T$$

BEWEIS. φ glm. stetig
$\Longrightarrow$ zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|\varphi(\lambda') - \varphi(\lambda'')| \leq \varepsilon \quad \forall \lambda', \lambda'' \in I$ mit $|\lambda' - \lambda''| \leq \delta$
Nach Vor. $\quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad$ mit $\quad \max\limits_{j=1,\ldots,k_n} \left| \lambda_{j+1}^{(n)} - \lambda_j^{(n)} \right| \leq \delta \quad \forall n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{Lemma 6.5}}{\Longrightarrow} \quad \|T_n - T_m\| \leq 2\varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \\
&\Longrightarrow \quad (T_n) \text{ Cauchy-Folge in } B(H) \\
&\overset{\text{Vollst,}}{\Longrightarrow} \quad \exists_1\, T \in B(H) \quad \text{mit} \quad \|T - T_n\|_{B(H)} \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

$\square$

DEFINITION 6.7

Sei $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$. f heißt ***von beschränkter Variation****, wenn es ein $C \geq 0$ gibt, derart dass für jede Zerlegung $z : a = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} = b$ von I gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} |f(\lambda_{j+1}) - f(\lambda_j)| \leq C\,.$$

Das Infimum all dieser oberen Schranken C heißt die ***Totalvariation*** *$V(f) := \int\limits_a^b |df(\lambda)|$ von f.*

LEMMA 6.8

Sei $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$

1. *Sind $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so ist $f := f_1 - f_2$ von beschränkter Variation.*
2. *Sind $g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, so ist $f := g_1 + ig_2$ von beschränkter Variation.*

BEWEIS.

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |f(\lambda_{k+1}) - f(\lambda_k)| &= \sum_{k=1}^{n} |f_1(\lambda_{k+1}) - f_1(\lambda_k) - f_2(\lambda_{k+1}) + f_2(\lambda_k)| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|f_1(\lambda_{k+1}) - f_1(\lambda_k)|}_{=f_1(\lambda_{k+1})-f_1(\lambda_k)} + \sum_{k=1}^{n} |f_2(\lambda_{k+1}) - f_2(\lambda_k)| = \\
&= f_1(b) - f_1(a) + f_2(b) - f_2(a)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |f(\lambda_{k+1}) - f(\lambda_k)| &= \sum_{k=1}^{n} |g_1(\lambda_{k+1}) - g_1(\lambda_k) + ig_2(\lambda_{k+1}) - ig_2(\lambda_k)| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |g_1(\lambda_{k+1}) - g_1(\lambda_k)| + \sum_{k=1}^{n} |g_2(\lambda_{k+1}) - g_2(\lambda_k)| \leq \\
&\leq C_1 + C_2
\end{aligned}$$

□

SATZ 6.9

Sei $E : \mathbb{R} \to B(H)$ eine Spektralschar.

a) Sei $f \in H$ beliebig und $\varphi(\lambda) := \langle E(\lambda)f, f\rangle$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann gilt $0 \le \varphi(\lambda) \le ||f||^2$, φ ist monoton wachsend und rechtsstetig.
Setze für $a \le b$: $\tilde\varphi(]a,b]) := \varphi(b) - \varphi(a)$.
Dann ist $\tilde\varphi$ reguläre Intervallfunktion auf $\mathbb{R}$ (vgl. Ana. III).

b) Seien $f, g \in H$. Setze $\varrho(\lambda) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varrho(\lambda) := \langle E(\lambda)f, g\rangle$.
Dann ist ϱ rechsstetig und auf jedem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ von beschränkter Variation.

BEWEIS.

a) (i) $\varphi(\lambda) = \langle E(\lambda)f, f\rangle = \langle E(\lambda)^2 f, f\rangle = \langle E(\lambda)f, E(\lambda)f\rangle = \|E(\lambda)f\|^2 \quad \Longrightarrow 0 \le \varphi(\lambda) \le \|f\|^2$

Weiter ist für $\lambda \le \mu$

$$\varphi(\lambda) = \|E(\lambda)f\|^2 \underset{\text{Def.}}{=} \|E(\lambda)E(\mu)f\|^2 \le \Big(\underbrace{\|E(\lambda)\|}_{=1} \|E(\mu)f\|\Big)^2 = \|E(\mu)f\|^2 = \varphi(\mu)$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } (\lambda_\nu) \subset \mathbb{R},\ \lambda_\nu \ge \lambda,\ \lambda_\nu \to \lambda \ &\underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}\ \|E(\lambda_\nu)f - E(\lambda)f\| \to 0 \\ &\Longrightarrow\ \varphi(\lambda_\nu) = \|E(\lambda_\nu)f\|^2 \to \|E(\lambda)f\|^2 = \varphi(\lambda) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \tilde\varphi(]a,b]) &= \varphi(b) - \varphi(a) \ge 0 \\ \tilde\varphi(]a,b] \cup]b,c]) &= \tilde\varphi(]a,c]) = \varphi(c) - \varphi(a) = \varphi(c) - \varphi(b) + \varphi(b) - \varphi(a) = \\ &= \tilde\varphi(]b,c]) + \tilde\varphi(]a,b]) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \tilde\varphi$ Intervallfunktion.

Sei $I =]a,b]$, $\varepsilon > 0$.
Sei φ rechsstetig $\Longrightarrow \exists \delta > 0$ mit $|\varphi(b+\delta) - \varphi(b)| \le \varepsilon$
Setze $I^* :=]a, b+\delta] \Longrightarrow I \subset \mathring{I}^*$
$\tilde\varphi(I^*) = \varphi(b+\delta) - \varphi(a) \le \varphi(b) + \varepsilon - \varphi(a) = \tilde\varphi(I) + \varepsilon$

b) mit Polarisierungsidentität

$$\begin{aligned} \varrho(\lambda) &= \langle E(\lambda)f, g\rangle = \langle E(\lambda)f, E(\lambda)g\rangle \underset{\text{Funkana I}}{=} \\ &= \frac{1}{4}\Big[\underbrace{\|E(\lambda)(f+g)\|^2}_{=:\varphi_1(\lambda)} - \underbrace{\|E(\lambda)(f-g)\|^2}_{=:\varphi_2(\lambda)} + \underbrace{i\|E(\lambda)(f-ig)\|^2}_{=:\varphi_3(\lambda)} - \underbrace{i\|E(\lambda)(f+ig)\|^2}_{=:\varphi_4(\lambda)}\Big] \end{aligned}$$

Nach a) sind die φ_i rechtsstetig $\Longrightarrow \varrho$ rechsstetig. Weiter φ_i monoton wachsen $\underset{6.8}{\Longrightarrow} \varphi_1 - \varphi_2, \varphi_3 - \varphi_4$ von beschränkter Variation $\underset{6.8}{\Longrightarrow} f = \varphi_1 - \varphi_2 + i(\varphi_3 - \varphi_4)$ von beschränkter Variation. □

BEMERKUNG. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ von beschränkter Variation. Dann gilt

$$\int_a^b |df(\lambda)| = \sup \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^n |f(\lambda_{i+1}) - f(\lambda_i)| \,:\, a = \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n+1} = b \right\}}_{=:A_1}.$$

Es ist

$$\int_a^b |df(\lambda)| = \inf \underbrace{\left\{ c \geq 0 \,:\, \sum_{i=1}^n |f(\lambda_{i+1}) - f(\lambda_i)| \leq c \;\forall a = \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n+1} = b \right\}}_{=:A_2}.$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \sup A_1 \in A_2 &\implies \inf A_2 \leq \sup A_1 \\ x \in A_1 &\implies x \leq c \;\forall c \in A_2 \\ &\implies x \leq \inf A_2 \;\forall x \in A_1 \\ &\implies \sup A_1 \leq \inf A_2 \end{aligned}$$

□

SATZ 6.10

Sei $E : \mathbb{R} \to B(H)$ eine Spektralschar, und seien $f, g \in H$.
Sei $\varrho(\lambda) := \langle E(\lambda)f, g\rangle \;\forall \lambda \in \mathbb{R}$
Dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\lambda)| := \sup_{\substack{a,b\in\mathbb{R} \\ a<b}} \int_a^b |d\varrho(\lambda| \leq \|f\| \cdot \|g\|\,.$$

Ist $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$ und $\varphi : I \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt

$$\langle g, \int_I \varphi(\lambda) dE(\lambda) f\rangle = \underbrace{\int_I \varphi(\lambda) d\langle g, E(\lambda)f\rangle}_{\text{(Riemann-Stieltje-Integral)}}$$

BEWEIS.

(i) Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ a = \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n+1} = b,\ I_k := [\lambda_k, \lambda_{k+1}]$.

$$A := \sum_{k=1}^{n} |\varrho(\lambda_{k+1}) - \varrho(\lambda_k)| = \sum_{k=1}^{n} |\langle E(I_k)f, g\rangle| \underset{\text{Projektor}}{=} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|\langle E(I_k)f, E(I_k)g\rangle|}_{\leq \|E(I_k)f\| \cdot \|E(I_k)g\|} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|E(I_k)f\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|E(I_k)g\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \|E(I_k)f\|^2 &= \sum_{k=1}^{n} \langle E(I_k)f, f\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle (E(\lambda_{k+1}) - E(\lambda_k))f, f\rangle = \\ &= \langle (E(b) - E(a))f, f\rangle = \|E(I)f\|^2 \leq \\ &\leq \|f\|^2\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad A \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b |d\varrho(\lambda)| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\varrho(\lambda) \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

(ii) Sei $Z^{(n)} : a = \lambda_1^{(n)} < \cdots < \lambda_{k_n+1}^{(n)} = b$ Zerlegungsfolge mit Feinheit $\varphi_n \to 0$,

$T_n := \sum_{j=1}^{k_n} \varphi(\lambda_j^{(n)}) E(I_j^{(n)})$ und $I_j^{(n)} := [\lambda_j^{(n)}, \lambda_{j+1}^{(n)}]$

$$\underset{6.6}{\Longrightarrow} \quad \int_I \varphi(\lambda) dE(\lambda) = \lim_{n\to\infty} T_n$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad \langle g, \int_I \varphi(\lambda) dE(\lambda)\, f\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle g, T_n f\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \varphi(\lambda_j^{(n)}) \langle g, E(I_j^{(n)}) f\rangle = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \varphi(\lambda_j^{(n)}) (\varphi(\lambda_{j+1}) - \varphi(\lambda_j)) = \underbrace{\int_I \varphi(\lambda) dg(\lambda)}_{\text{existiert!}}\end{aligned}$$

□

SATZ 6.11

Sei $E : \mathbb{R} \to B(H)$ *Spektralschar,* $\varphi : I \to \mathbb{C}$ *stetig. Dann ist*

$$\left[\int_I \varphi(\lambda) dE(\lambda)\right]^* = \int_I \varphi^*(\lambda) dE(\lambda)\,.$$

Weiter gilt

$$\|\varphi(E_i I)f\| \leq \max_{\lambda \in I} |\varphi(\lambda)| \|E(I)f\|\,.$$

BEWEIS.
Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 6.10.

$$\begin{aligned}
\langle g, \varphi(E_i I) f\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle g, \underbrace{\sum_{j=1}^{k_n} \varphi(\lambda_j^{(n)}) E(I_j^{(n)})}_{=T_n} f\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \varphi(\lambda_j^{(n)}) \langle g, \underbrace{E(I_j^{(n)})}_{\text{Projektor}} f\rangle = \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{j=1}^{k_n} \varphi^*(\lambda_j^{(n)}) E(I_j^{(n)}) g, f\rangle \underset{6.6}{=} \langle \varphi^*(E_i I) g, f\rangle \quad \forall f, g \in H
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad [\varphi(E_i I)]^* = \varphi^*(E_i I)$

$$\begin{aligned}
\|T_n f\|^2 &= \langle \sum_{j=1}^{k_n} \varphi(\lambda_j^{(n)}) E(I_j^{(n)}) f, \sum_{r=1}^{k_n} \varphi(\lambda_r^{(n)}) E(I_r^{(n)}) f\rangle = \\
&= \sum_{j,r=1}^{k_n} \varphi^*(\lambda_j^{(n)}) \varphi(\lambda_r^{(n)}) \langle \underbrace{E(I_j^{(n)}) E(I_r^{(n)})}_{=\delta_{jr} E(I_j^{(n)})} f, f\rangle = \sum_{j=1}^{k_n} |\varphi(\lambda_j^{(n)})|^2 \|E(I_j^{(n)}) f\|^2 \leq \\
&\leq \left(\max_{\lambda\in I} |\varphi(\lambda)|\right)^2 \sum_{j=1}^{k_n} \langle E(I_j^{(n)}) f, f\rangle \overset{\text{Teleskop-}}{\underset{\text{summe}}{=}} \left(\max_{\lambda\in I} |\varphi(\lambda)|\right)^2 \underbrace{\langle E(I) f, f\rangle}_{=\|E(I)f\|^2}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \|T_n f\| \leq \max_{\lambda\in I} |\varphi(\lambda)| \|E(I) f\| \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \quad$ Beh. $\square$

SATZ 6.12

Sei $E : \mathbb{R} \to B(H)$ Spektralschar, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |\varphi(\lambda)| < \infty$.
Für jedes $f \in H$ existiert dann

$$\varphi(E) f := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) dE(\lambda) f := \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b \varphi(\lambda) dE(\lambda) f\,.$$

(starker Limes)

Weiter gilt $\|\varphi(E)\|_{B(H)} \leq \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |\varphi(\lambda)|$.
Ist überdies $\lim_{\lambda\to+\infty} |\varphi(\lambda)| = 0$ und $\lim_{\lambda\to-\infty} |\varphi(\lambda)| = 0$ so ist

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) dE(\lambda) - \int_a^b \varphi(\lambda) dE(\lambda) \right\|_{B(H)} \to 0 \quad \begin{pmatrix} b \to +\infty \\ a \to -\infty \end{pmatrix}$$

BEWEIS.
Sei $a < 0 < b$, dann ist

$$\int_a^b \varphi(\lambda) dE(\lambda) = \int_a^0 \varphi(\lambda) dE(\lambda) + \int_0^b \varphi(\lambda) dE(\lambda)\,.$$

(Betrachte Zerlegungsfolge Z_n mit $0 \in Z_n$.)

(i) Sei $(b_n) \subset \mathbb{R}$ mit $0 < b_n \to +\infty$.
Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $b_m > b_n$.

$$\left\| \int_0^{b_m} \varphi(\lambda) dE(\lambda) f \; - \int_0^{b_n} \varphi(\lambda) dE(\lambda) f \right\| \underset{\text{s.o.}}{=} \left\| \int_{b_n}^{b_m} \varphi(\lambda) dE(\lambda) f \right\| \leq$$

$$\underset{6.11}{\leq} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\varphi(\lambda)| \, \|E(b_m) f - E(b_n) f\| \to 0 \quad (n, m \to \infty), \quad \text{da } E(b_m) f \to f \quad (m \to \infty)$$

Analog für $a_n \to -\infty$.

(ii) Weiter ist $\|\varphi(E_i[a,b])\| \underset{6.11}{\leq} \max_{\lambda \in [a,b]} |\varphi(\lambda)| \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\varphi(\lambda)|$

$$\Longrightarrow \quad \|\varphi(E)\| \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\varphi(\lambda)|$$

($\varphi(E)$ ist als starker Limes beschränkter Funktionen aus $B(H)$ nach Funkana I, 9.2)

(iii) Ist $\lim_{|\lambda| \to +\infty} |\varphi(\lambda)| = 0$, so ist für $0 < b_n \to +\infty$

$$\left\| \int_{b_n}^{b_m} \varphi(\lambda) dE(\lambda) f \right\| \underset{6.11}{\leq} \sup_{\lambda \in [b_n, b_m]} |\varphi(\lambda)| \, \|\underbrace{(E(b_m) - E(b_n))}_{\text{Projektor}} f\| \leq \sup_{\lambda \in [b_n, b_m]} |\varphi(\lambda)| \, \|f\| \quad \forall f \in H$$

$$\Longrightarrow \left\| \int_{b_n}^{b_m} \varphi(\lambda) dE(\lambda) f \right\|_{B(H)} \leq \sup_{\lambda \in [b_n, b_m]} |\varphi(\lambda)| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

Analog für $a_n \to -\infty$

$$\Longrightarrow \left(\int_{a_n}^{b_n} \varphi(\lambda) dE(\lambda) \right) \subset B(H) \qquad \text{Cauchy-Folge in } B(H)$$

$\Longrightarrow$ Beh.

$\square$

SATZ 6.13

Sei $E : \mathbb{R} \to B(H)$ Spektralschar. Seien $I, I' \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle mit $\mathring{I} \cap \mathring{I'} = \emptyset$.
Ferner seien $\varphi : I \to \mathbb{C}$ und $\psi : I' \to \mathbb{C}$ stetig.
Dann gilt:

$$\varphi(E_i I)\psi(E_i I') = 0$$

BEWEIS. Seien

$$T_n := \sum_{j=1}^{k_n} \varphi(\lambda_j^{(n)}) E(I_j^{(n)}), \quad S_m := \sum_{r=1}^{l_m} \psi(\mu_r^{(m)}) E({I'}_r^{(m)})$$

Zerlegungssummen analog zum Beweis von 6.10 mit

$$T_n \to \varphi(E_i I), \quad S_m \to \psi(E_i I')$$

$$T_n S_m = \sum_{j=1}^{k_n} \sum_{r=1}^{l_m} \varphi(\lambda_j^{(n)}) \psi(\mu_r^{(m)}) \underbrace{E(I_j^{(n)}) E({I'}_r^{(m)})}_{=0, \text{ Satz 6.4}}$$

$\overset{n\to\infty}{\underset{m\to\infty}{\Longrightarrow}}$ Beh. □

SATZ 6.14

Sei $E : \mathbb{R} \to B(H)$ Spektralschar. Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall und $\varphi, \psi : I \to \mathbb{C}$ stetig.
Dann gilt

$$\varphi(E_i I)\psi(E_i I) = (\varphi \cdot \psi)(E_i I)$$

BEWEIS. Seien

$$T_n := \sum_{j=1}^{k_n} \varphi(\lambda_j^{(n)}) E(I_j^{(n)}), \quad S_n := \sum_{j=1}^{k_n} \psi(\lambda_j^{(n)}) E(I_j^{(n)})$$

Zerlegungssummen wie in 6.10

$\Longrightarrow \quad T_n \to \varphi(E_i I), \quad S_n \to \psi(E_i I)$

$$T_n S_n = \sum_{i,j=1}^{k_n} \varphi(\lambda_i^{(n)}) \psi(\lambda_j^{(n)}) \underbrace{E(I_i^{(n)}) E(I_j^{(n)})}_{=\delta_{i,j} E(I_j^{(n)})} = \sum_{j=1}^{k_n} (\varphi \cdot \psi)(\lambda_j^{(n)}) E(\lambda_j^{(n)}) \ \to \ (\varphi \cdots \psi)(E_i I)$$

□

7. Die Stieltjessche Umkehrformel

SATZ 7.1

a) *Sei* $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *monoton wachsend. Für jedes* $\lambda \in \mathbb{R}$ *existiert* $\varrho(\lambda + 0) := \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \varrho(\lambda + \varepsilon)$ *und* $\varrho(\lambda - 0) := \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \varrho(\lambda - \varepsilon)$.

b) *Ist* $\varrho : [a, b] \to \mathbb{R}$ *von beschränkter Variation, so gibt es monoton wachsende* $\varrho_1, \varrho_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ *mit* $\varrho = \varrho_1 - \varrho_2$. (GILT AUCH FÜR $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.)

c) *Ist* $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *von beschränkter Variation, so sind* $\Re\varrho$, $\Im\varrho$ *von beschränkter Variation.*

d) *Ist* $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *von beschränkter Variation, so existiert für jedes* $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \varrho(\lambda + 0)$ *und* $\varrho(\lambda - 0)$.

e) *Ist* $\varrho : [a, b] \to \mathbb{C}$ *von beschränkter Variation,* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *stetig, so existiert* $\int\limits_a^b f(x) d\varrho(x)$

BEWEIS.

a) Es ist $\left(\varrho\left(\lambda - \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $\varrho\left(\lambda - \frac{1}{n}\right) \leq \varrho(\lambda)$
$\underset{\text{Ana I}}{\Longrightarrow} \exists x_1 \in \mathbb{R} : \quad \varrho\left(\lambda - \frac{1}{n}\right) \to x_1$
Sei nun $\varepsilon_\nu > 0$, $\varepsilon_\nu \to 0$.
Wäre $(\varrho\left(\lambda - \varepsilon_\nu\right))$ nicht konvergent gegen x_1
$\Longrightarrow$ es existiert Teilfolge $(\varepsilon_{\nu_k}) \subset (\varepsilon_v)$ mit $|\varrho(\lambda - \varepsilon_{\nu_k}) - x_1| \geq \varepsilon_0 \ \forall k \in \mathbb{N} \qquad (\star)$
O.E. $\varrho(\lambda - \varepsilon_{\nu_k}) \to x_0 \qquad$ (beschränkte Folge besitzt konvergente Teilfolge)

$$\begin{aligned}
\text{Sei } n \in \mathbb{N} \text{ mit } |x_1 - \varrho(\lambda - \tfrac{1}{n})| \le \frac{\varepsilon_0}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \varrho(\lambda - \frac{1}{n}) \ge x_1 - \frac{\varepsilon_0}{2} \\
&\Longrightarrow \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad \varepsilon_\nu \le \frac{1}{n} \quad \forall k \ge k_0 \\
&\underset{\text{wachsend}}{\overset{\varrho \text{ monoton}}{\Longrightarrow}} \quad \varrho(\lambda - \varepsilon_{\nu_k}) \ge \varrho(\lambda - \frac{1}{n}) \quad \forall k \ge k_0 \\
&\Longrightarrow \quad \varrho(\lambda - \varepsilon_{\nu_k}) \ge x_1 - \frac{\varepsilon_0}{2} \\
&\underset{k \to \infty}{\Longrightarrow} \quad x_0 - x_1 \ge -\frac{\varepsilon_0}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sei } k \in \mathbb{N} \text{ mit } |x_0 - \varrho(\lambda - \varepsilon_{\nu_k})| \le \frac{\varepsilon_0}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \frac{1}{n} \le \varepsilon_{\nu_k} \quad \forall n \ge n_0 \\
&\Longrightarrow \quad \varrho(\lambda - \frac{1}{n}) \ge \varrho(\lambda - \varepsilon_{\nu_k}) \quad \forall n \ge n_0 \\
&\Longrightarrow \quad \varrho(\lambda - \frac{1}{n}) \ge x_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} \\
&\Longrightarrow \quad x_1 - x_0 \ge -\frac{\varepsilon_0}{2} \\
&\Longrightarrow \quad |x_1 - x_0| \le \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{Widerspruch zu } (\star)
\end{aligned}$$

b) Sei $\pi(x) := \int\limits_a^x |d\varrho(\lambda)|$, $\pi(a) := 0$, $x \in [a,b]$

$\Longrightarrow \pi$ monoton wachsend.

(SETZE $\pi(x) := \int\limits_{-\infty}^x |d\varrho(\lambda)|$ FALLS $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.)

Sei $v(x) := \pi(c) - \varrho(x)$. Sei $a \le x < y \le b$

$$\Longrightarrow \quad v(y) = \int\limits_a^x |d\varrho(\lambda)| + \int\limits_x^y |d\varrho(\lambda)| - \varrho(y), \quad v(x) = \int\limits_a^x |d\varrho(\lambda)| - \varrho(x)$$

$$\Longrightarrow \quad v(y) - v(x) = \int\limits_x^y |d\varrho(\lambda)| - (\varrho(y) - \varrho(x)) \ge 0$$

$\Longrightarrow v$ monoton wachsend

c) klar

d) folgt aus a)-c)

e) Natanson

$\square$

BEISPIEL 7.2

Sei $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varrho(\lambda) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \lambda < 0 \\ 1 & \text{für} \quad \lambda \geq 0 \end{cases}$

Sei $F(z) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z}$ für $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$

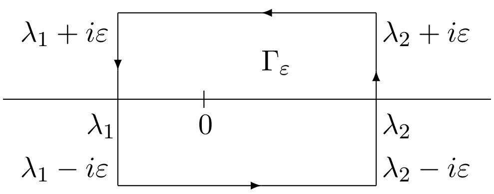
Sei $a < 0 < b$, $a = \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n+1} = b$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\tilde{\lambda_i} - z} \left(\varrho(\lambda_{i+1}) - \varrho(\lambda_i)\right) = \frac{1}{\tilde{\lambda_{i_0}} - z} \to -\frac{1}{z}$ (falls Feinheit $\to 0$),

wobei $0 \in]\lambda_{i_0}, \lambda_{i_0+1}]$, $\tilde{\lambda_{i_0}} \in [\lambda_{i_0}, \lambda_{i_0+1}]$

$\Longrightarrow F(z) = -\frac{1}{z} \quad \Longrightarrow \quad$ F holomorph in $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$

Sei $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} F(z)\, dz \overset{\text{Residuen-}}{\underset{\text{satz Ana IV}}{=}} 2\pi i \, Res_0 F = -2\pi i$$

$$\int\limits_{\lambda_1 - i\varepsilon}^{\lambda_2 - i\varepsilon} F(z)\, dz = \int\limits_0^1 F(\lambda_1 - i\varepsilon + t(\lambda_2 - \lambda_1))(\lambda_2 - \lambda_1)\, dt \overset{\lambda_1 - i\varepsilon + t(\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda - i\varepsilon}{\underset{\Longleftrightarrow t = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}}{=}} \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(\lambda - i\varepsilon)\, d\lambda)$$

Analog $\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} F(z)\, dz = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(\lambda - i\varepsilon)\, d\lambda + \int\limits_{\lambda_2}^{\lambda_1} F(\lambda + i\varepsilon)\, d\lambda + \underbrace{\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{F(\lambda_2 + i\lambda)}_{\text{stetig}} d\lambda}_{\to 0, (\varepsilon \to 0)} + \underbrace{\int\limits_{\varepsilon}^{-\varepsilon} F(\lambda_1 + i\lambda)\, d\lambda}_{\to 0}$

$$\Longrightarrow \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} (F(\lambda + i\varepsilon) - F(\lambda - i\varepsilon))\, d\lambda \right] = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} F(z)\, dz \right] = 1 = \underbrace{\varrho(\lambda_2)}_{=1} - \underbrace{\varrho(\lambda_1)}_{=1} \qquad \diamond$$

LEMMA 7.3

Sei $\varrho : [a,b] \to \mathbb{C}$ von beschränkter Variation, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Sei $a < c < b$. Dann gilt

a) $\displaystyle\int\limits_a^b f(\mu)\,d\varrho(\mu) = \int\limits_a^c f(\mu)\,d\varrho(\mu) + \int\limits_c^b f(\mu)\,d\varrho(\mu)$

b) Es existiert

$$\begin{aligned}\int\limits_a^{c-0} f(\mu)\,d\varrho(\mu) &:= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(\mu)\,d\varrho(\mu) = \int\limits_a^{c} f(\mu)\,d\varrho(\mu) - f(c)(\varrho(c) - \varrho(c-0))\\ \int\limits_{c+0}^{b} f(\mu)\,d\varrho(\mu) &:= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(\mu)\,d\varrho(\mu) = \int\limits_c^{b} f(\mu)\,d\varrho(\mu) - f(c)(\varrho(c+0) - \varrho(c))\end{aligned}$$

c) Sei $\displaystyle\int\limits_{c-0}^{c+0} f(\mu)\,d\varrho(\mu) := f(c)(\varrho(c+0) - \varrho(c-0))$*. Dann ist*

$$\int\limits_a^b f(\mu)\,d\varrho(\mu) = \int\limits_a^{c-0} f(\mu)\,d\varrho(\mu) + \int\limits_{c-0}^{c+0} f(\mu)\,d\varrho(\mu) + \int\limits_{c+0}^{b} f(\mu)\,d\varrho(\mu)$$

BEWEIS.

a) Die Integrale existieren nach 7.1 e) $\underset{\text{Def.}}{\overset{\text{leicht}}{\Longrightarrow}}$ Beh.

b) Sei $\varepsilon > 0$ mit $0 < \varepsilon < c - a$

$$\Longrightarrow \int\limits_a^c f(\mu)\,d\varrho(\mu) = \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(\mu)\,d\varrho(\mu) + \int\limits_{c-\varepsilon}^{c} f(\mu)\,d\varrho(\mu) \qquad (\star)$$

$$\int\limits_{c-\varepsilon}^{c} f(\mu)\,d\varrho(\mu) \underset{\int \text{ linear klar}}{=} \int\limits_{c-\varepsilon}^{c} (f(\mu) - f(c))\,d\varrho(\mu) + \int\limits_{c-\varepsilon}^{c} f(c)\,d\varrho(\mu)$$

$$f(c)\int\limits_{c-\varepsilon}^{c} d\varrho(\mu) = f(c)(\varrho(c) - \varrho(c-\varepsilon))$$

$$\Longrightarrow \left|\int\limits_{c-\varepsilon}^{c} f(\mu)\,d\varrho(\mu) - f(c)(\varrho(c) - \varrho(c-\varepsilon))\right| = \left|\int\limits_{c-\varepsilon}^{c} (f(\mu) - f(c))\,d\varrho(\mu)\right| \leq$$

$$\overset{\text{leicht}}{\underset{\text{zu sehen}}{\leq}} \max_{|\lambda-c|\leq\varepsilon} |f(\lambda)-f(c)| \underbrace{\int\limits_{c-\varepsilon}^{c} |d\varrho(\lambda)|}_{\leq \int_a^b |d\varrho(\lambda)|} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

Wegen $\varrho(c-\varepsilon) \to \varrho(c-0)$

$$\Longrightarrow \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int\limits_{c-\varepsilon}^{c} f(\mu)\, d\varrho(\mu) = f(c)(\varrho(c)-\varrho(c-0))$$

$$\overset{\star}{\Longrightarrow} \exists \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(\mu)\, d\varrho(\mu) = \int\limits_{a}^{c} f(\mu)\, d\varrho(\mu) - f(c)(\varrho(c)-\varrho(c-0))$$

Analog $\displaystyle\int\limits_{c+0}^{b} f(\mu)\, d\varrho(\mu)$

c) Es ist $\displaystyle\int\limits_{a}^{b} f\, d\varrho = \int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f\, d\varrho + \int\limits_{c-\varepsilon}^{c} f\, d\varrho + \int\limits_{c}^{c+\varepsilon} f\, d\varrho + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f\, d\varrho$

$$\overset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow} \int\limits_{a}^{b} f\, d\varrho = \int\limits_{a}^{c-0} f\, d\varrho + \underbrace{f(c)(\varrho(c)-\varrho(c-0)) + f(c)(\varrho(c+0)-\varrho(c))}_{=f(c)(\varrho(c+0)-\varrho(c-0))} + \int\limits_{c+0}^{b} f\, d\varrho$$

$\square$

BEMERKUNG. Sei $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von beschränkter Variation und sei $b_n \to +\infty$

Zeige: $\displaystyle\int\limits_{b_m}^{b_n} |d\varrho(\lambda)| \to 0 \ (n,m\to\infty)$

Wäre es anders $\Longrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 \ : \ \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n_N, m_N \geq N$ mit $\displaystyle\int\limits_{b_{m_N}}^{b_{n_N}} |d\varrho(\lambda)| \geq \varepsilon_0$

Finde induktiv Folge $m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \ldots,\ b_{m_1} < b_{n_1} < b_{m_2} < b_{n_2} < \ldots$ mit $\displaystyle\int\limits_{b_{m_i}}^{b_{n_i}} |d\varrho(\lambda)| \geq \varepsilon_0$

$$\Longrightarrow \infty > \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\lambda)| \geq \sum_{i=1}^{l} \int\limits_{b_{m_i}}^{b_{n_i}} |d\varrho(\lambda)| \geq l\cdot\varepsilon_0 \to \infty \quad (l\to\infty) \text{ Widerspruch}$$

Zeige: $\displaystyle\int\limits_{b_n}^{\infty} |d\varrho(\lambda)| \to 0 \quad (n\to\infty)$

Wäre es anders $\Longrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 \ : \ \int\limits_{b_n}^{\infty} |d\varrho(\lambda)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (o.E. sonst für Teilfolge)

O.E. $b_n \leq b_{n+1}$ (sonst wähle Teilfolge)

$\int\limits_0^{\infty} |d\varrho(\lambda)| = \int\limits_0^{b_n} |d\varrho(\lambda)| + \int\limits_{b_n}^{\infty} |d\varrho(\lambda)|$

$\Longrightarrow \int\limits_0^{b_n} |d\varrho(\lambda)| \leq \int\limits_0^{\infty} |d\varrho(\lambda)| - \varepsilon_0$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\int\limits_0^{\infty} |d\varrho(\lambda)| \leq \int\limits_0^{\infty} |d\varrho(\lambda)| - \varepsilon_0$ Widerspruch

SATZ 7.4 (Stieltjes-Umkehrformel)

Sei $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von beschränkter Variation.

Sei $F : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch $F(z) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z}$.

Dann ist F in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ holomorph und es gilt

$$|F(z)| \leq \frac{1}{|\Im z|} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\lambda)|$$

sowie

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \to 0}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} (F(\lambda + i\varepsilon) - F(\lambda - i\varepsilon))\, d\lambda \right] = \frac{1}{2}(\varrho(\lambda_2 + 0) + \varrho(\lambda_2 - 0)) - \frac{1}{2}(\varrho(\lambda_1 + 0) + \varrho(\lambda_1 - 0))$$

BEWEIS.

a) Existenz von $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z}$:

Sei $A_n := \int\limits_0^n \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z}$, existiert nach 7.1e)

$$\Longrightarrow |A_n - A_m| = \left| \int\limits_m^n \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z} \right| \leq \frac{1}{|\Im z|} \int\limits_m^n |d\varrho(\lambda)| \to 0 \quad (n, m \to \infty) \quad \text{(siehe Bem.)}$$

$\Longrightarrow \exists A \in \mathbb{C}: \ A_n \to A$

Sei nun $b_n \to +\infty$, $\varepsilon > 0$ gegeben.
Sei $m_0 \in \mathbb{N}: \ |A - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq m_0$
und sei $m_1 \geq m_0: \ \dfrac{1}{|\Im z|} \displaystyle\int_m^n |d\varrho(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq m_1$
Sei $n_0 \in \mathbb{N}: \ b_n \geq m_1 \quad \forall n \geq n_0$

$$\overset{n \geq n_0}{\Longrightarrow} \left| A - \int_0^{b_n} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z} \right| \leq |A - A_{m_1}| + \left| \int_{m_1}^{b_n} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{|\Im z|} \int_{m_1}^{b_n} |d\varrho(\lambda)| \leq \varepsilon$$

$\Longrightarrow F$ wohldefiniert

b) Holomorphie:

Sei $a < b, \ a = \lambda_1^{(n)} < \cdots < \lambda_{k_n+1}^{(n)} = b$ mit $\delta(n) := \max\limits_{j=1,\ldots,k_n} \left(\lambda_{j+1}^{(n)} - \lambda_j^{(n)} \right) \to 0 \quad (n \to \infty)$

Sei $F_n(z) := \displaystyle\sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_j^{(n)} - z} \left[\varrho(\lambda_{j+1}^{(n)} - \lambda_j^{(n)}) \right]$

$$\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} F_n(z) \to \int_a^b \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z} =: F_{a,b}(z)$$

Weiter ist $\displaystyle\int_a^b \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z} = \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\lambda_j^{(n)}}^{\lambda_{j+1}^{(n)}} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z}$ und $\varrho(\lambda_{j+1}^{(n)}) - \varrho(\lambda_j^{(n)}) = \displaystyle\int_{\lambda_j^{(n)}}^{\lambda_{j+1}^{(n)}} d\varrho(\lambda)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow |F_n(z) - F_{a,b}(z)| &= \left| \sum_{j=1}^{k} \int_{\lambda_j^{(n)}}^{\lambda_{j+1}^{(n)}} \left(\frac{1}{\lambda_j^{(n)} - z} - \frac{1}{\lambda - z} \right) d\varrho(\lambda) \right| \\
&\leq \max_{\substack{\lambda \in \left[\lambda_j^{(n)}, \lambda_{j+1}^{(n)}\right] \\ j=1,\ldots,k_n}} \underbrace{\left| \frac{1}{\lambda_j^{(n)} - z} - \frac{1}{\lambda - z} \right|}_{= \frac{\lambda - \lambda_j^{(n)}}{(\lambda_n^{(n)} - z)(\lambda - z)}} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\lambda_j^{(n)}}^{\lambda_{j+1}^{(n)}} |d\varrho(\lambda)| \\
&\leq \frac{\delta(n)}{|\Im z|^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\lambda)|}_{< \infty}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow F_n \to F_{a,b}$ gleichmäßig in $H_\varepsilon := \{ z \in \mathbb{C} : |\Im z| > \varepsilon \}, \ \ \varepsilon > 0$
F_n ist holomorph in $H_\varepsilon \underset{20.4}{\overset{\text{AnaIV}}{\Longrightarrow}} F_{a,b}$ in $H_\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Longrightarrow F_{a,b}$ holomorph in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |F(z) - F_{a,b}(z)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z} - \int_a^b \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z} \right| = \left| \int_{-\infty}^{a} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z} + \int_b^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\Im z|} \left(\int_{-\infty}^{a} |d\varrho(\lambda)| + \int_b^{+\infty} |d\varrho(\lambda)| \right) \end{aligned}$$

$\overset{\text{Bem.}}{\Longrightarrow} F_{a,b} \to F$ gleichmäßig in $H_\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (a \to -\infty,\ b \to +\infty)$
$\Longrightarrow F$ holomorph in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |F_{a,b}(z)| &\leq \frac{1}{|\Im z|} \int_a^b |d\varrho(\lambda)| \leq \frac{1}{|\Im z|} \int_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\lambda)| \ \ \forall a, b \in \mathbb{R} \\ \underset{b \to +\infty}{\overset{a \to -\infty}{\Longrightarrow}} |F(z)| &\leq \frac{1}{|\Im z|} \int_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\lambda)| \end{aligned}$$

c) Sei nun $\lambda_1 < \lambda_2$ fest gewählt, $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [F(\lambda + i\varepsilon) - F(\lambda - i\varepsilon)]\, d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\mu)}{\mu - \lambda - i\varepsilon} \right] d\lambda - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\mu)}{\mu - \lambda + i\varepsilon} \right] d\lambda \right) \end{aligned}$$

Sei $f(\mu, \lambda) := \dfrac{1}{\mu - \lambda - i\varepsilon}$
Sei $a = \mu_1^{(n)} < \ldots < \mu_{k_n+1}^{(n)} = b$ (Feinheit $\delta(n) \to 0$)

$$\Longrightarrow \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \underbrace{\sum_{i=1}^{k_n} f(\mu_i^{(n)}, \lambda) \left(\varrho(\mu_{i+1}^{(n)}) - \varrho(\mu_i^{(n)}) \right)}_{=:G_n(\lambda)} d\lambda = \underbrace{\sum_{i=1}^{k_n} \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\mu_i^{(n)}, \lambda) d\lambda \right] \left(\varrho(\mu_{i+1}^{(n)}) - \varrho(\mu_i^{(n)}) \right)}_{\overset{\text{Def.}}{\to} \int_a^b \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\mu,\lambda) d\lambda d\varrho(\mu)}$$

Sei $G_{a,b}(\lambda) := \displaystyle\int_a^b f(\mu, \lambda) d\varrho(\mu) \underset{\text{vgl. b)}}{=} F_{a,b}(\lambda + i\varepsilon)$
$\Longrightarrow G_n(\lambda) = F_n(\lambda + i\varepsilon) \underset{\text{b)}}{\to} F_{a,b}(\lambda + i\varepsilon) = G_{a,b}(\lambda)$ und die Konvergenz ist gleichmäßig in $[\lambda_1, \lambda_2]$

$$\Longrightarrow \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} G_n(\lambda) d\lambda \longrightarrow \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} G_{a,b}(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_a^b f(\mu, \lambda) d\varrho(\mu) d\lambda$$

D.h. $\int\limits_a^b \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\mu,\lambda) d\lambda d\varrho(\mu) = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int\limits_a^b f(\mu,\lambda) d\varrho(\mu) d\lambda \quad \forall a < b \in \mathbb{R}$

$G_{a,b} \longrightarrow G$ gleichmäßig, wobei $G(\lambda) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mu,\lambda) d\varrho(\mu) = F(\lambda + i\varepsilon)$

$$\Longrightarrow \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \underbrace{\int\limits_a^b f(\mu,\lambda) d\varrho(\mu)}_{=G_{a,b}(\lambda)} d\lambda \quad \longrightarrow \quad \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\mu,\lambda) d\varrho(\mu) d\lambda$$

$$\int\limits_a^b \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\mu,\lambda) d\lambda d\varrho(\mu) \quad \longrightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\mu,\lambda) d\lambda d\varrho(\mu) \quad \begin{pmatrix} a \to -\infty \\ b \to +\infty \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\frac{1}{\mu - \lambda - i\varepsilon} - \frac{1}{\mu - \lambda + i\varepsilon} \right) d\lambda d\varrho(\mu) \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{2i\varepsilon}{(\mu-\lambda)^2 + \varepsilon^2} d\lambda d\varrho(\mu) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \arctan\left(\frac{\lambda - \mu}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda-\mu}{\varepsilon}\right)^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\lambda - \mu)^2}$$

$$\Longrightarrow I(\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{\lambda_2 - \mu}{\varepsilon}\right) - \arctan\left(\frac{\lambda_1 - \mu}{\varepsilon}\right)\right)}_{=:\kappa(\mu,\varepsilon)} d\varrho(\mu)$$

Es ist $\arctan$ monoton wachsend und $\lambda_2 > \lambda_1$
$\Longrightarrow \kappa(\mu,\varepsilon) \geq 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$

Weiter $|\arctan x| \leq \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad |\kappa(\mu,\varepsilon)| \leq 1$

Setze

$$\omega := \frac{1}{2}\left(\varrho(\lambda_2 + 0) + \varrho(\lambda_2 - 0)\right) - \frac{1}{2}\left(\varrho(\lambda_1 + 0) + \varrho(\lambda_1 - 0)\right) \tag{2}$$

d) Sei $0 < \eta < \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$
Sei $\mu \leq \lambda_1 - \eta \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 - \mu \geq \eta$

$$\Longrightarrow 0 \leq \kappa(\mu,\varepsilon) \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\lambda_1 - \mu}{\varepsilon}\right)\right) \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \underbrace{\arctan\left(\underbrace{\frac{\eta}{\varepsilon}}_{>0}\right)}_{>0, \longrightarrow \frac{\pi}{2}}\right) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

unabhängig von μ.

$\Longrightarrow \kappa(\cdot,\varepsilon) \underset{(\varepsilon\to 0)}{\longrightarrow} 0$ gleichmäßig in $]-\infty, \lambda_1-\eta]$
Analog $\kappa(\cdot,\varepsilon) \longrightarrow 0$ gleichmäßig in $[\lambda_2+\eta,\infty[$

Sei $\lambda_1+\eta \le \mu \le \lambda_2-\eta$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow 1 \quad &\ge \quad \kappa(\mu,\varepsilon) \underset{\text{ungerade}}{\overset{\text{arctan}}{=}} \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{\lambda_2-\mu}{\varepsilon}\right)+\arctan\left(\frac{\mu-\lambda_1}{\varepsilon}\right)\right)\\ &\ge \quad \frac{1}{\pi}\Big(\arctan\underbrace{\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)}_{>0}+\arctan\underbrace{\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)}_{>0}\Big) \longrightarrow 1 \quad (\varepsilon\to 0)\end{aligned}$$

unabhängig von μ.
$\Longrightarrow \kappa(\cdot,\varepsilon)\to 1$ gleichmäßig in $[\lambda_1+\eta,\lambda_2-\eta]$

Außerdem gilt $\begin{array}{ll}\kappa(\lambda_2,\varepsilon)\to\frac12 & (\varepsilon\to 0)\\ \kappa(\lambda_1,\varepsilon)\to\frac12 & (\varepsilon\to 0)\end{array}$

e) Zeige: Zu $\delta>0\ \exists 0<\eta_0<\frac12(\lambda_2-\lambda_1)$, so dass

$$\left|\left(\int_{\lambda_1-\eta}^{\lambda_1-0}+\int_{\lambda_1+0}^{\lambda_1+\eta}+\int_{\lambda_2-\eta}^{\lambda_2-0}+\int_{\lambda_2+0}^{\lambda_2+\eta}\right)\kappa(\mu,\varepsilon)d\varrho(\mu)\right| \le \delta \quad \forall 0<\eta\le\eta_0 \quad \forall\varepsilon>0 \tag{3}$$

(i) Es ist $\varrho=\varrho_1-\varrho_2+i(\varrho_3-\varrho_4)$ mit $\varrho_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monoton wachsend
Für $0<\tau<\eta<\frac12(\lambda_2-\lambda_1)$ ist

$$\left|\int_{\lambda_1-\eta}^{\lambda_1-\tau}\kappa(\mu,\varepsilon)d\varrho_k(\mu)\right| \le \underbrace{|\kappa(\mu,\varepsilon)|}_{\le 1}(\varrho_k(\lambda_1-\tau)-\varrho_k(\lambda_1-\eta)) \le \varrho_k(\lambda_1-0)-\varrho_k(\lambda_1-\eta) \tag{4}$$

$$\underset{\tau\to 0}{\overset{\text{Lemma 7.3}}{\Longrightarrow}} \quad \left|\int_{\lambda_1-\eta}^{\lambda_1-0}\kappa(\mu,\varepsilon)d\varrho_k(\mu)\right| \le \varrho_k(\lambda_1-0)-\varphi_k(\lambda_1-\eta)$$

Zu $\delta>0\ \exists\eta^-(\delta,\lambda_1,\varrho_k)>0$ mit $0\le\varrho_k(\lambda_1-0)-\varrho_k(\lambda_1-\eta)\le\frac{\delta}{16} \quad \forall 0<\eta\le\eta^-(\delta,\lambda_1,\varrho_k)$

$$\Longrightarrow \left|\int_{\lambda_1-\eta}^{\lambda_1-0}\kappa(\mu,\varepsilon)d\varrho_k(\mu)\right| \le \left|\frac{\delta}{16}\right| \quad \forall 0<\eta\le\eta^-(\delta,\lambda_1,\varrho_k) \tag{5}$$

(ii) Behandele alle übrigen Integrale analog für ϱ_k und setze

$$\eta_0(\delta) := \min(\eta^-\{\delta,\lambda_j,\varrho_k) : k=1,\dots,4, j=1,2,\pm\}$$

$\overset{(5)}{\Longrightarrow}$ Beh.

f) Für $0 < \eta < \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$ und $\varepsilon > 0$ ist

$$I(\varepsilon) = \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\lambda_1-\eta}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\lambda_1-\eta}^{\lambda_1-0}}_{I_2} + \underbrace{\int_{\lambda_1-0}^{\lambda_1+0}}_{I_3} + \underbrace{\int_{\lambda_1+0}^{\lambda_1+\eta}}_{I_4} + \underbrace{\int_{\lambda_1+\eta}^{\lambda_2-\eta}}_{I_5} + \underbrace{\int_{\lambda_2-\eta}^{\lambda_2-0}}_{I_6} + \underbrace{\int_{\lambda_2-0}^{\lambda_2+0}}_{I_7} + \underbrace{\int_{\lambda_2+0}^{\lambda_2+\eta}}_{I_8} + \underbrace{\int_{\lambda_2+\eta}^{+\infty}}_{I_9} \Big) \kappa(\mu,\varepsilon) d\varrho(\mu) \qquad (6)$$

g) Nach Lemma 7.3 ist

$$\begin{aligned} I_3(\varepsilon) &= \int_{\lambda-1-0}^{\lambda_1+0} \kappa(\mu,\varepsilon) d\varrho(\mu) = \kappa(\lambda_1,\varepsilon)(\varrho(\lambda_1+0) - \varrho(\lambda_1-0)) = & (7) \\ &= \frac{1}{2}(\varrho(\lambda_1+0) - \varrho(\lambda_1-0)) + (\kappa(\lambda_1,\varepsilon) - \frac{1}{2})(\varrho(\lambda_1+0) - \varrho(\lambda_1-0)) \end{aligned}$$

Analog

$$I_7(\varepsilon) = \frac{1}{2}(\varrho(\lambda_2+0) - \varrho(\lambda_2-0)) + (\kappa(\lambda_2,\varepsilon) - \frac{1}{2})(\varrho(\lambda_2+0) - \varrho(\lambda_2-0))$$

Weiter

$$\begin{aligned} I_5(\varepsilon,\eta) &= \int_{\lambda_1+\eta}^{\lambda_2-\eta} \kappa(\mu,\varepsilon) d\varrho(\mu) = \varrho(\lambda_2-\eta) - \varrho(\lambda_1+\eta) + \int_{\lambda_1+\eta}^{\lambda_2-\eta} (\kappa(\mu,\varepsilon)-1) d\varrho(\mu) = \\ &= \varrho(\lambda_2-0) + \varrho(\lambda_1+0) + \int_{\lambda_1+\eta}^{\lambda_2+\eta} (\kappa(\mu,\varepsilon)-1) d\varrho(\mu) + \\ &\quad + (\varrho(\lambda_2-\eta) - \varrho(\lambda_2-0)) + (\varrho(\lambda_1+0) - \varrho(\lambda_1+\eta)) & (8) \end{aligned}$$

Aus (2), (7), (8) folgt nun

$$\begin{aligned} &|I_3(\varepsilon) + I_7(\varepsilon) + I_5(\varepsilon,\eta) - \omega| \le & (9) \\ &\le \sup_{\mu\in[\lambda_1+\eta,\lambda_2-\eta]} |\kappa(\mu,\epsilon) - 1| \int_{\lambda_1+\eta}^{\lambda_2-\eta} |d\varrho(\mu)| + |\varrho(\lambda_2-\eta) - \varrho(\lambda_2-0)| + \\ &\quad + |\varrho(\lambda_1+0) - \varrho(\lambda_1+\eta)| + \sum_{j=1}^{2} |\kappa(\lambda_j,\varepsilon) - \frac{1}{2}||\varrho(\lambda_j+0) - \varrho(\lambda_j-0)| + \\ &\quad + \underbrace{|\frac{1}{2}(\varrho(\lambda_1+0) - \varrho(\lambda_1-0)) - \varrho(\lambda_1+0) + \frac{1}{2}(\varrho(\lambda_2+0) - \varrho(\lambda_2-0)) + \varrho(\lambda_2-0) - \omega|}_{=0} \end{aligned}$$

h) Abschließende Abschätzung

Sei $\delta > 0$ gegeben

(i) Wähle $0 < \eta_1 < \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$ so dass

$$|\varrho(\lambda_2-\eta) - \varrho(\lambda_2-0)| + |\varrho(\lambda_1+0) - \varrho(\lambda_1+\eta)| \le \frac{\delta}{3} \quad \forall 0 < \eta \le \eta_1 \qquad (10)$$

(ii) Wähle gemäß d) $0 < \eta_0 \leq \eta_1$ so dass

$$|I_2(\varepsilon,\eta) + I_4(\varepsilon,\eta) + I_6(\varepsilon,\eta) + I_8(\varepsilon,\eta))| \leq \frac{\delta}{3} \quad \forall 0 < \eta \leq \eta_0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Also

$$\begin{aligned} |I(\varepsilon) - \omega| &\leq |I_1(\varepsilon,\eta_0)| + |I_9(\varepsilon,\eta_0)| + |I_3(\varepsilon) + I_7(\varepsilon) + I_5(\varepsilon,\eta_0) - \omega| + \frac{\delta}{3} \leq \\ &\underset{(9),(10)}{\leq} |I_1(\varepsilon,\eta_0)| + |I_9(\varepsilon,\eta_0)| + \sum_{j=1}^{2} |\kappa(\lambda_j,\varepsilon) - \frac{1}{2}||\varrho(\lambda_j+0) - \varrho(\lambda_j-0)| + \\ &\quad + \sup_{\mu\in[\lambda_1+\eta_0,\lambda_2-\eta_0]} |\kappa(\mu,\varepsilon) - 1| \int_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\mu)| + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

(iii) Es ist

$$|I_1(\varepsilon,\eta_0)| + |I_9(\varepsilon,\eta_0)| \leq (\sup_{\mu\in]-\infty,\lambda_1-\eta_0]} |\kappa(\mu,\varepsilon)| + \sup_{\mu\in[\lambda_2+\eta,\infty[} |\kappa(\mu,\varepsilon)|) \int_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\mu)|$$

und der gleichmäßigen Konvergenz (vgl. c))

$\Longrightarrow \exists \varepsilon_1 > 0$ mit

$$|I_1(\varepsilon,\eta_0)| + |I_9(\varepsilon,\eta_0)| \leq \frac{\delta}{9} \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$$

Analog $\exists 0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ mit

$$\sup_{\mu\in[\lambda_1+\eta_0,\lambda_2-\eta_0]} |\kappa(\mu,\varepsilon) - 1| \int_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\mu)| \leq \frac{\delta}{9} \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$$

Wegen $\kappa(\lambda_j,\varepsilon) \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (\varepsilon \to 0)$

$\Longrightarrow \exists 0 < \varepsilon_3 \leq \varepsilon_2$ mit $\displaystyle\sum_{j=1}^{2} |\kappa(\lambda_j,\varepsilon) - \frac{1}{2}|\,|\varrho(\lambda_j+0) - \varrho(\lambda_j-0)| \leq \frac{\delta}{9} \quad \forall 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_3$

Also nach (11): $|I(\varepsilon) - \omega| \leq \delta \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_3$

$\square$

DEFINITION 7.5

Sei $0 < \mu < \infty$*. Sei* $T(M)$ *die Menge aller* $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *mit den Eigenschaften*

1. ϱ *von beschränkter Variation*
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\lambda)| \leq M$
3. $\varrho(\lambda + 0) = \varrho(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \varrho(\lambda) = 0$

BEMERKUNG.

$\varrho \in T(M) \implies |\varrho(\lambda)| \leq M \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Sei $-\infty < \lambda_n < \lambda, \;\; \lambda_n \to -\infty$

$$\varrho(\lambda) - \varrho(\lambda_n) = \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} d\varrho(\lambda) \quad \implies \quad |\varrho(\lambda) - \varrho(\lambda_n)| \leq \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} |d\varrho(\lambda)| \leq M$$
$$\underset{n \to \infty}{\implies} \quad |\varrho(\lambda)| \leq M$$

DEFINITION 7.6

Sei $0 < M < \infty$*.*

Sei $T^*(M)$ *die Menge aller holomorphen* $F : \mathbb{C} \backslash \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*, zu denen es ein* $\varrho \in T(M)$ *gibt mit*

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$$

BEMERKUNG.

Sei $\varrho : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend.

Zeige: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es höchstens endlich viele $x \in [a, b]$ mit $\varrho(x + 0) - \varrho(x) \geq \varepsilon$

Sei $D := \varrho(b) - \varrho(a) \geq 0$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{D}{\varepsilon}$

Wären $x_1 < ... < x_{n+1}$ mit $\varrho(x_i + 0) - \varrho(x_i) \geq \varepsilon$

$\Longrightarrow \varrho(x_{i+1}) \geq \varrho(x_i + 0) \geq \varrho(x_i) + \varepsilon$
$\Longrightarrow \varrho(b) \geq \varrho(x_{n+1}) \geq \varrho(x_1) + n\varepsilon \geq \varrho(a) + n\varepsilon$
$\Longrightarrow \varrho(b) - \varrho(a) \geq n\varepsilon > D \Longrightarrow$ Widerspruch
Sei $A_n := \{x \in [a,b] : \varrho(x+0) - \varrho(x) \geq \frac{1}{n}\}$ endlich
$\Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ abzählbar

SATZ 7.7

Seien $\varrho_i \in T(M),\ F_i \in T^*(M)$ *mit* $F_i(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_i(\lambda)}{\lambda - z},\ \ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \quad (i = 1, 2)$
Weiter gelte $F_1(z) = F_2(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$
Dann gilt

$$\varrho_1(\lambda) = \varrho_2(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

BEWEIS.
Sei E die höchstens abzählbare Menge der Unstetigkeitsstellen von ϱ_1 und ϱ_2

Zeige: $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \mu \in \mathbb{R}\backslash E,\ \ \mu \in]\lambda, \lambda + \varepsilon[$

dann wäre $(\lambda_0, \varepsilon_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ mit $\underbrace{]\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon_0[}_{\text{überabzählbar}} \subset E \Longrightarrow$ Widerspruch

(i) $\Longrightarrow \mathbb{R}\backslash E$ dicht in $\mathbb{R}$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \exists (\lambda_k) \subset \mathbb{R}\backslash E$ mit $\lambda_k \to \lambda,\ \ \lambda_k > \lambda$
Sei $\lambda \in \mathbb{R}\backslash E,\ (\lambda_k) \subset \mathbb{R}\backslash E$ mit $\lambda_k \to -\infty$ (existiert nach (i))
$\underset{\lambda \text{ Stetigkeitsstelle}}{\overset{\text{Satz 7.4}}{\Longrightarrow}} \varrho_1(\lambda) - \varrho_1(\lambda_n) = \varrho_2(\lambda) - \varrho_2(\lambda_n)$
$\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \varrho_1(\lambda) = \varrho_2(\lambda)$
Ist $\lambda \in E \Longrightarrow \exists (\lambda_k) \subset \mathbb{R}\backslash E,\ \ \lambda_k > \lambda,\ \lambda_k \to \lambda$
$\varrho_1(\lambda_k) = \varrho_2(\lambda_k)$
$\ \ \downarrow \qquad\qquad \downarrow$
$\varrho_1(\lambda) = \varrho_2(\lambda)$, da $\varrho_1,\ \varrho_2$ rechtsstetig.

$\square$

LEMMA 7.8

Sei $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *von beschränkter Variation,* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\lambda)| \leq M$

Dann existiert $\varrho(-\infty) := \lim\limits_{\lambda \to -\infty} \varrho(\lambda)$*, und mit* $\varrho^*(\lambda) := \varrho(\lambda + 0) - \varrho(-\infty) \;\; (\lambda \in \mathbb{R})$ *gilt:*

$$\varrho^* \in T(M)$$

Ist weiter $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *stetig mit* $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} |f(\lambda)| = 0$*, so gilt:*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\varrho(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\varrho^*(\lambda)$$

BEWEIS.

1. Sei $\varrho = (\varrho_1 - \varrho_2) + i(\varrho_3 - \varrho_4), \;\; \varrho_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend
   O.E: können die ϱ_k beschränkt gewählt werden siehe Beweis von 7.1
   $\underset{\text{Blatt6 Aufg 1}}{\Longrightarrow} \exists \varrho_k(-\infty) = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} \varrho_k(\lambda) \Rightarrow \exists \varrho(-\infty)$

2. ϱ^* rechtsstetig:

   Sei $E \subset \mathbb{R}$ abzählbar, so dass ϱ auf $\mathbb{R} \backslash E$ stetig ist.
   Ist $\lambda \in \mathbb{R} \backslash E \Longrightarrow \varrho^*(\lambda) = \varrho(\lambda) - \varrho(-\infty)$
   ϱ^* stetig in $\lambda \Longrightarrow \varrho^*$ rechtsstetig in λ
   Ist $\lambda \in E, \;\; \lambda_k > \lambda, \;\; \lambda_k \to \lambda$
   $\forall k \in \mathbb{N} \; \exists \, 0 < \varepsilon_k < \frac{1}{k} : \;\; |\varrho(\mu) - \varrho(\lambda_k + 0)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall \mu \in]\lambda_k, \lambda_k + \varepsilon_k[$
   Wähle $\mu_k \in \;]\lambda_k, \lambda_k + \varepsilon_k[\; \cap \; \mathbb{R} \backslash E$ (möglich, da E abzählbar)
   $\Longrightarrow |\varrho^*(\lambda_k) - \varrho^*(\lambda)| \leq |\varrho(\lambda_k + 0) - \varrho(\mu_k)| + |\varrho(\mu_k) - \varrho(\lambda + 0)| \to 0 \; (k \to \infty)$
   Seien $a, b \in \mathbb{R}, \;\; a < b, \;\; a = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_{n+1} = b, \;\; b \notin E$
   Sei $\varepsilon > 0$ gegeben
   $\forall i = 1, ..., n \; \exists \mu_i \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}[: \;\; |\varrho(\lambda_i + 0) - \varrho(\mu_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2n}$
   Setze $\mu_{n+1} := b$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} |\varrho(\lambda_{i+1} + 0) - \varrho(\lambda_i + 0)| \leq \\ & \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\varrho(\mu_{i+1} - \varrho(\mu_i)|}_{\leq M} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\varrho(\lambda_{i+1} + 0) - \varrho(\mu_{i+1})| + |\varrho(\mu_i) - \varrho(\lambda_i + 0)|}_{\leq \varepsilon} \\ & \leq \mu + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b |d\varrho^*(\lambda)| \leq M$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho^*(\lambda)| \leq M$$

3. $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \varrho^*(\lambda) = 0$:

   Betrachte die monoton wachsenden ϱ_j
   Sei $(\lambda_k) \subset \mathbb{R},\ \lambda_k \to -\infty$
   $\Longrightarrow \varrho_j(-\infty) \leq \varrho_j(\lambda_k) \leq \varrho_j(\lambda_k + 0)$
   $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \lambda_k^* > \lambda_k,\ \lambda_k^* \in \mathbb{R} \backslash E,\ 0 \leq \lambda_k^* - \lambda_k \leq \frac{1}{k}$
   $\Longrightarrow \lambda_k^* \to -\infty$
   Es ist $\varrho_j(\lambda_k + 0) = \inf\{\varrho_j(\lambda) : \lambda > \lambda_k\} \leq \varrho_j(\lambda_k^*)$
   $\Longrightarrow 0 \leq \underbrace{\varrho_j(\lambda_k + 0) - \varrho_j(-\infty)}_{=\varrho_j^*(\lambda_k)} \leq \varrho_j(\lambda_k^*) - \varrho_j(-\infty) \to 0 \quad (k \to \infty)$
   $\Longrightarrow \varrho_j^*(\lambda_k) \to 0 \quad (k \to \infty) \quad (j = 1, ..., 4) \Longrightarrow$ Beh.

4. Übungsaufgabe (Blatt 7/1)

□

SATZ 7.9 **Auswahlsatz von E.Helly**

Seien $\varrho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von beschränkter Variation mit

(i) $|\varrho_n(\lambda)| \leq K \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho_n(\lambda)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gibt es eine Teilfolge $(\varrho_{n_k}) \subset (\varrho_n)$ und ein $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von beschränkter Variation, derart dass

$$\varrho_{n_k}(\lambda) \to \varrho(\lambda) \quad (k \to \infty) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\lambda)| \leq M$$

BEWEIS.
Natanson □

SATZ 7.10 **Konvergenzsatz von E.Helly**

Seien $\varrho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *von beschränkter Variation,* $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

mit $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho_n(\lambda)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *und* $\varrho_n(\lambda) \underset{(n\to\infty)}{\to} \varrho(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Dann ist ϱ *von beschränkter Variation und* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\lambda)| \leq M$

Ist weiter $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *stetig,* $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} |f(\lambda)| = 0$*, so gilt:*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\varrho_n(\lambda) \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\varrho(\lambda)$$

BEWEIS.

1. Da $\varrho_n(0) \to \varrho(0), \quad \exists C > 0 : \ |\varrho_n(0)| \leq C$
   Sei $\lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow |\varrho_n(\lambda) - \varrho_n(0)| \leq M$
   $\Longrightarrow |\varrho_n(\lambda)| \leq |\varrho_n(\lambda) - \varrho_n(0)| + |\varrho_n(0)| \leq M + C \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   Nach Satz 7.9 existiert Teilfolge (ϱ_{n_k}) und $\hat{\varrho} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |d\hat{\varrho}(\lambda)| \leq M$ und $\varrho_{n_k}(\lambda) \to \hat{\varrho}(\lambda)$
   Andererseits $\varrho_{n_k}(\lambda) \to \varrho(\lambda)$
   $\Longrightarrow \varrho = \hat{\varrho}$

2. Existenz der Integrale nach Übungsaufgabe (Blatt 7/1)
   Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\Longrightarrow \exists a > 0 : \ |f(\lambda)| \leq \dfrac{\varepsilon}{8M} \quad \forall |\lambda| \geq a$
   f ist in $[-a, a]$ glm. stetig
   $\Longrightarrow \exists \delta > 0 : \ |f(\lambda) - f(\lambda')| \leq \dfrac{\varepsilon}{8M} \quad \forall \lambda, \ \lambda' \in [-a, a], \ |\lambda - \lambda'| \leq \delta$
   Sei $Z : -a = \lambda_1 < ... < \lambda_{k+1} = a$ mit $\max\limits_{1\leq j\leq k} (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \leq \delta$

Setze $I_j := [\lambda_j, \lambda_{j+1}], \quad \varrho_n(I_j) := \varrho_n(\lambda_{j+1}) - \varrho_n(\lambda_j)$

$$\Longrightarrow \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\varrho_n(\lambda) - \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j)\varrho_n(I_j) \right| \leq$$

$$\leq \int_{-a}^{a} f(\lambda) d\varrho_n(\lambda) - \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j)\varrho_n(I_j) + \int_{-\infty}^{-a} \underbrace{|f(\lambda)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{8M}} |d\varrho_n(\lambda)| + \int_{a}^{+\infty} \underbrace{|f(\lambda)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{8M}} |d\varrho_n(\lambda)| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \left| \sum_{j=1}^{k} \int_{I_j} f(\lambda) d\varrho_n(\lambda) - \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j) \int_{I_j} d\varrho_n(\lambda) \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{j=1}^{k} \int_{I_j} \underbrace{|f(\lambda) - f(\lambda_j)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{8M}} |d\varrho_n(\lambda)|$$

$$\leq \frac{3\varepsilon}{8}$$

Analog für ϱ : $\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\varrho(\lambda) - \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j)\varrho(I_j) \right| \leq \frac{3\varepsilon}{8}$

Sei $T := \max_{\lambda \in \mathbb{R}} |f(\lambda)|$

$\Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \max_{1 \leq j \leq k+1} |\varrho_n(\lambda_j) - \varrho(\lambda_j)| \leq \frac{\varepsilon}{8Tk} \quad \forall n \geq n_0$

$$\Longrightarrow \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\varrho_n(\lambda) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\varrho(\lambda) \right| \leq \frac{3}{4}\varepsilon + \left| \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j)(\varrho_n(I_j) - \varrho(I_j)) \right| \leq$$

$$\leq \frac{3}{4}\varepsilon + \sum_{j=1}^{k} \underbrace{|f(\lambda_j)|}_{\leq T} (\underbrace{|\varrho_n(\lambda_{j+1}) - \varrho(\lambda_{j+1})|}_{\leq \frac{\varepsilon}{8Tk}} + \underbrace{|\varrho(\lambda_j) - \varrho_n(\lambda_j)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{8Tk}}) \leq$$

$$\leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$\square$

SATZ 7.11

Sei $(F_n) \subset T^*(M)$*. Dann gibt es eine Teilfolge* $(F_{n_k}) \subset (F_n)$ *und ein* $F \in T^*(M)$ *mit*

$$F_{n_k}(z) \to F(z) \quad (k \to \infty) \quad \forall z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$$

BEWEIS.

Nach Def. existiert $\varrho_n \in T(M)$ mit $F_n(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_n(z)}{\lambda - z} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho_n(\lambda)| \leq M$ und nach Bemerkung $|\varrho_n(\lambda)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Nach 7.9 existiert $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |d\varrho(\lambda)| \leq M$

und eine Teilfolge $(\varrho_{n_k}) \subset (\varrho_n)$ mit $\varrho_{n_k}(\lambda) \to \varrho(\lambda) \quad (k \to \infty)$

$\underset{f(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z}}{\overset{7.10}{\Longrightarrow}} F_{n_k}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_{n_k}(\lambda)}{\lambda - z} \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z} =: F(z)$

Setze gemäß Lemma 7.8: $\quad \varrho^*(\lambda) := \varrho(\lambda + 0) - \varrho(-\infty)$

$\Longrightarrow \varrho^* \in T(M)$ und $F(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho^*(\lambda)}{\lambda - z}$ nach Lemma 7.8

Nach 7.4 ist F holomorph in $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$

$\Longrightarrow F \in T^*(M)$ $\square$

8. Eine Integraldarstellung für die Resolvente eines selbstadjungierten Operators

Sei in diesem Paragraphen H ein komplexer, separabler Hilbertraum.

LEMMA 8.1

(M.H.Stone) *Sei $A : D(A) \to H$ hermitesch.*
Dann gibt es einen in H dichten Untervektorraum $D' \subset D(A)$ und eine Folge $(A_n) \subset B(H)$, A_n selbstadjungiert mit

a) $\forall f \in D(A)\ \exists (f_n) \subset D'$ *mit* $\|f_n - f\| + \|Af - Af_n\| \to 0$

b) $A_n f \to Af \quad \forall f \in D'$

c) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists a_n < b_n$ *und Spektralschar* E_n *mit* $E_n(\lambda) = 0$ *für* $\lambda < a_n,\ E_n(\lambda) = I$ *für* $\lambda \geq b_n$
und $\displaystyle\int\limits_{a_n}^{b_n} \lambda dE_n(\lambda) = A_n$
Weiter gibt es $k_n \in \mathbb{N}$ *und* $\lambda_l^{(n)},\ l = 1, ..., k_n$ *mit*
$a_n = \lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < ... < \lambda_{k_n}^{(n)} = b_n$ *und* $E_n(\lambda) =$*const. für* $\lambda_l^{(n)} \leq \lambda < \lambda_{l+1}^{(n)},\ l = 1, ..., k_n - 1$

BEWEIS.

i) Sei $W := \{(A + i)f : f \in D(A)\} \subset H \overset{H \text{ separabel}}{\underset{\text{FunkAnaI2.20}}{\Longrightarrow}} W$ separabel
$\Longrightarrow \exists (g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset W$, die dicht in W liegt
Sei $f_k \in D(A)$ mit $(A + i)f_k = g_k$
Setze $M_n := \{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k : c_k \in \mathbb{C}\}$
$\Longrightarrow M_n$ abgeschlossen (Koeffizientenweise Konvergenz)
Sei $D' := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n \Longrightarrow D' \subset D(A)$ Untervektorraum

ii) Zeige: $\forall f \in D(A)\ \exists (f_k) \subset D' : f_k \to f,\ Af_k \to Af$

Sei $f \in D(A),\ g := (A+i)f \in W$

$\forall j \in \mathbb{N}\ \exists k_j \in \mathbb{N} :\ \|g - g_{k_j}\| \leq \frac{1}{j}$

Sei $f_j \in D(A)$ mit $(A+i)f_j = g_{k_j}$

$\overset{A \text{ hermitesch}}{\underset{2.8}{\Longrightarrow}} \|f_j - f\| \leq \frac{1}{|m_i|}\|(A+i)(f_j - f)\| = \|g_{k_j} - g\| \to 0,\ f_j \in D'$

$f_j \to f,\ Af_j \to Af$ klar

$D' \subset D(A)$ dicht, $D(A) \subset H$ dicht $\Longrightarrow D' \subset H$ dicht

iii) Sei $P_n : H \to M_n$ der orthogonale Projektor auf M_n

Setze $A_n := P_n A P_n : H \to M_n$

Für $f, g \in H$ ist

$$\langle A_n f, g\rangle = \langle P_n A P_n f, g\rangle = \langle A P_n f, \underbrace{P_n g}_{\in D(A)}\rangle = \langle P_n f, A P_n g\rangle = \langle f, P_n A P_n g\rangle = \langle f, A_n g\rangle$$

$\Longrightarrow A_n : H \to H$ hermitesch $\overset{2.6}{\Longrightarrow} A_n$ beschränkt und selbstadjungiert

Sei nun $f \in D' \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ f \in M_n \quad \forall n \geq n_0$

$\Longrightarrow A_n f = P_n A \underbrace{P_n f}_{=f} = P_n A f \quad \forall n \geq n_0$

Zeige: $P_n A f \to Af$

α) $\|P_n A f\| \leq \|Af\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

β) Sei $g \in D' \Longrightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} :\ P_n g = g \quad \forall n \geq n_1$

$\Longrightarrow \langle P_n A f, g\rangle = \langle Af, P_n g\rangle = \langle Af, g\rangle \quad \forall n \geq n_1$

$\Longrightarrow \langle P_n A f, g\rangle \to \langle Af, g\rangle \quad (n \to \infty)$

Da D' dicht in H $\overset{\text{FunkAnaI}}{\underset{9.3}{\Longrightarrow}} P_n A f \underset{w}{\to} Af$

γ) Weiter ist $\|P_n A f\|^2 = \langle P_n A f, P_n A f\rangle = \langle Af, P_n A f\rangle \to \langle Af, Af\rangle = \|Af\|^2$

$\overset{\text{FunkAnaI}}{\underset{9.4}{\Longrightarrow}} P_n A f \to Af$

iv) Es ist M_n unitärer Vektorraum (d.h. Prähilbertraum) mit $\dim M_n =: p_n \leq n$ und $A_n : M_n \to M_n$ hermitesch.

Nach Hauptachsentransformation gibt es reelle Eigenwerte $\mu_1^{(n)} \leq ... \leq \mu_{p_n}^{(n)}$ und orthonormierte Eigenvektoren $\varphi_j^{(n)} \in M_n$ mit $A_n \varphi_j^{(n)} = \mu_j^{(n)} \varphi_j^{(n)} \quad j = 1, ..., p_n$

Für $f \in H$ sei $E_j^{(n)} f := \langle \varphi_j^{(n)}, f\rangle \varphi_j^{(n)}$

$$\begin{aligned} E_i^{(n)} E_j^{(n)} f &= \langle \varphi_i^{(n)}, \langle \varphi_j^{(n)}, f\rangle \varphi_j^{(n)}\rangle \varphi_i^{(n)} = \langle \varphi_j^{(n)}, f\rangle \underbrace{\langle \varphi_i^{(n)}, \varphi_j^{(n)}\rangle}_{=\delta_{ij}} \varphi_i^{(n)} = \delta_{ij} E_j^{(n)} f \\ \langle E_j^{(n)} f, g\rangle &= \langle \langle \varphi_j^{(n)}, f\rangle \varphi_j^{(n)}, g\rangle = \langle \varphi_j^{(n)}, f\rangle^* \langle \varphi_j^{(n)}, g\rangle = \langle \varphi_j^{(n)}, g\rangle \langle f, \varphi_j^{(n)}\rangle = \\ &= \langle f, \langle \varphi_j^{(n)}, g\rangle \varphi_j^{(n)}\rangle = \langle f, E_j^{(n)} g\rangle \end{aligned}$$

$\Longrightarrow E_j^{(n)}$ Projektor

Sei $E_0^{(n)} := P_{M_n^\perp}$ (Projektor auf Orthogonalraum), $\quad \mu_0^{(n)} := 0$

Sei $f \in H, \quad f = \underbrace{f_1}_{\in M_n} + \underbrace{f_2}_{\in M_n^\perp}, \quad f_1 = \sum_{i=1}^{p_n} c_i \varphi_i^{(n)}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \sum_{j=1}^{p_n} E_j^{(n)} f &= \sum_{j=1}^{p_n} \langle \varphi_j^{(n)}, \sum_{i=1}^{p_n} c_i \varphi_i^{(n)} \rangle \varphi_j^{(n)} + \sum_{j=1}^{p_n} \underbrace{\langle \varphi_j^{(n)}, f_2 \rangle}_{=0} \varphi_j^{(n)} = \\ &= \sum_{j=1}^{p_n} \sum_{i=1}^{p_n} c_i \underbrace{\langle \varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)} \rangle}_{=\delta_{ij}} \varphi_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{p_n} c_i \varphi_i^{(n)} = f_1 = P_n f\end{aligned}$$

Also $P_n = \sum_{j=1}^{p_n} E_j^{(n)}$

Sei $g \in M_n$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow A_n g &= P_n A P_n g = P_n A g = \sum_{j=1}^{p_n} E_j^{(n)} (Ag) = \sum_{j=1}^{p_n} \underbrace{\langle \varphi_j^{(n)}, Ag \rangle}_{=\langle A\varphi_j^{(n)}, g \rangle} \varphi_j^{(n)} = \\ &= \sum_{j=1}^{p_n} \underbrace{\mu_j^{(n)}}_{\in \mathbb{R}} \langle \varphi_j^{(n)}, g \rangle \varphi_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{p_n} \mu_j^{(n)} E_j^{(n)} g\end{aligned}$$

Sei $f \in H, \quad f = \underbrace{f_1}_{\in M_n} + \underbrace{f_2}_{\in M_n^\perp}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow A_n f &= P_n A P_n (f_1 + f_2) = P_n A P_n f_1 = A_n f_1 = \sum_{j=1}^{p_n} \mu_j^{(n)} E_j^{(n)} f_1 = \sum_{j=1}^{p_n} \mu_j^{(n)} E_j^{(n)} f = \\ &= \sum_{j=0}^{p_n} \mu_j^{(n)} E_j^{(n)} f\end{aligned}$$

Bezeichne mit $\lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \ldots < \lambda_{k_n}^{(n)}$ die p.w. verschiedenen unter den Zahlen $\mu_0^{(n)}, \mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_{p_n}^{(n)}$ $(\Longrightarrow k_n \leq p_n + 1)$

Setze $\tilde{E}_l^{(n)} := \sum_{\substack{j \in \{0,\ldots,p_n\} \\ \mu_j^{(n)} = \lambda_l^{(n)}}} E_j^{(n)} \quad (l = 1, \ldots, k_n)$

$\Longrightarrow \tilde{E}_l^{(n)}$ Projektor, $\quad \tilde{E}_l^{(n)} \cdot \tilde{E}_k^{(n)} = \delta_{lk} \tilde{E}_k^{(n)}$

Weiter ist $\sum_{l=1}^{k_n} \tilde{E}_l^{(n)} = \sum_{j=0}^{p_n} \tilde{E}_j^{(n)} = P_n + P_{\mu_n^\perp} = I$

Sei $E_n(\lambda) := \sum_{\{l : \lambda_l^{(n)} \leq \lambda\}} \tilde{E}_l^{(n)} \underset{\text{1a)}}{\overset{\text{Blatt 8}}{\Longrightarrow}} E_n$ Spektralschar

Sei $a_n := \lambda_1^{(n)},\ b_n := \lambda_{k_n}^{(n)}$
$\Longrightarrow E_n(\lambda) = 0$ für $\lambda < a_n,\quad E_n(\lambda) = I$ für $\lambda \geq b_n$ und $E_n(\lambda) = \text{const.}$ für $\lambda \in [\lambda_l^{(n)}, \lambda_{l+1}^{(n)}[$
$A_n = \int\limits_{a_n}^{b_n} \lambda dE_n(\lambda)$ und Blatt 8/1b

□

LEMMA 8.2

Seien $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert, $A_n : D(A_n) \to H$ selbstadjungiert und es gelte

(i) Es gibt einen Untervektorraum $D' \subset H$ mit $D' \subset D(A), D' \subset D(A_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) für alle $f \in D' :\ A_n f \to Af \quad (n \to \infty)$

(iii) $\forall f \in D(A)\ \exists (f_n) \subset D'$ mit $\|f - f_n\| + \|Af - Af_n\| \to 0$

Dann gilt: Für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $f \in H$ ist

$$R(z, A_n)f \to R(z, A)f$$

BEWEIS.

i) Sei $H'_z := \{(A - z)f :\ f \in D'\}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$
Zeige: H'_z ist dicht in H
Da A selbstadjungiert
$\underset{z\in S(A)}{\overset{2.11}{\Longrightarrow}} (A - z)D(A) = H$, d.h. zu $g \in H$ gibt es ein $f \in D(A)$ mit $(A - z)f = g$
Nach c) (D' ist A-dicht) $\exists (f_n) \subset D'$ mit $\|f - f_n\| + \|Af - Af_n\| \to 0$
Sei $g_n := (A - z)f_n \in H'_z$
$\Longrightarrow \|g - g_n\| = \|(A - z)f - (A - z)f_n\| \leq \|Af - Af_n\| + |z|\|f - f_n\| \to 0$
$\Longrightarrow g \in \overline{H'_z}$
Also auch $\overline{H'_i} = \overline{H'_{-i}} = H \quad \underset{2.13}{\Longrightarrow} \quad A|_{D'}$ wesentlich selbstadjungiert

ii) Sei $g \in H'_z$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow R(z, A_n)g - R(z, A)g &= (A_n - z)^{-1}g - (A - z)^{-1}g = \\ &= (A_n - z)^{-1}(A - z)(A - z)^{-1}g \\ &\quad -(A_n - z)^{-1}(A_n - z)(A - z)^{-1}g = \\ &= (A_n - z)^{-1}(A - A_n)(A - z)^{-1}g\end{aligned}$$

Weiter

$$\begin{aligned}\|R(z,A_n)g - R(z-A)g\| &\underset{2.8}{\leq} \frac{1}{|\Im z|}\|(A_n-z)(R(z,A_n)g - R(z,A)g)\|z \leq \\ &\leq \frac{1}{|\Im z|}\|(A-A_n)(A-z)^{-1}g\| \to 0 \quad \text{nach b)}\end{aligned}$$

Sei nun $g \in H \Longrightarrow \exists (g_k) \subset H'_z$ mit $g_k \to g$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|g - g_{k_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{4}|\Im z|$

Wähle dann $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|R(z,A_n)g_{k_0} - R(z,A)g_{k_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$

$$\begin{aligned}\underset{n\geq n_0}{\Longrightarrow} \|R(z,A_n)g - R(z,A)g\| &\leq \|R(z,A_n)(g-g_{k_0})\| + \underbrace{\|R(z,A_n)g_{k_0} - R(z,A)g_{k_0}\|}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}} + \\ &\quad + \|R(z,A)(g_{k_0}-g)\| \\ &\underset{2.8}{\leq} \frac{2}{|\Im z|}\|g - g_{k_0}\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0\end{aligned}$$

□

LEMMA 8.3

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert und $f, g \in H$.
Dann gibt es ein $\varrho \in \Gamma(\|f\| \cdot \|g\|)$ mit $\Im z \neq 0$
$< g, R(z,A)f >= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z}$ *für $\Im z \neq 0$*

BEWEIS.
A selbstadjungiert $\Longrightarrow A$ hermitesch
Seien $A_n,\ E_n$ nach Lemma 8.1

$$A_n = \int\limits_{a_n}^{b_n} \lambda\, dE_n(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE_n(\lambda)$$

Wegen

$$\int\limits_{a_n}^{b_n} dE_n(\lambda) \underset{\text{Aufg. 1b)}}{\overset{\text{Blatt 8}}{=}} \sum_{\{a_n \leq \lambda_l^{(n)} \leq b_n\}} E_l^{(n)} = \sum_{j=0}^{p_n} E_j^{(n)} = I$$

ist

$$(A_n - z) = \int\limits_{a_n}^{b_n} (\lambda - z)\, dE_n(\lambda)$$

$$\Longrightarrow \frac{dE_n(\lambda)}{\lambda - z} \int_{a_n}^{b_n} (\lambda - z)\, dE_n(\lambda) \overset{6.14}{=} \int_{a_n}^{b_n} dE_n(\lambda) = I$$

$$\Longrightarrow \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{\lambda - z}\, dE_n(\lambda) = \left(\int_{a_n}^{b_n} (\lambda - z)\, dE_n(\lambda) \right)^{-1} = (A_n - z)^{-1} = R(z, A_n)$$

Sei $\varrho_n(\lambda) := \langle g, E_n(\lambda) f \rangle$

$$\underset{\varphi(\lambda)=\frac{1}{\lambda - z}}{\overset{6.10}{\Longrightarrow}} \langle g, R(z, A_n) f \rangle = \left\langle g, \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{\lambda - z} dE_n(\lambda) f \right\rangle = \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{\lambda - z} d\langle g, E_n(\lambda) f \rangle$$

Nach 6.9b) ist ϱ_n rechtsstetig.

Da $E_n(\lambda) f \to 0 \quad (\lambda \to -\infty) \Longrightarrow \lim\limits_{\lambda \to -\infty} \varrho_n(\lambda) = 0$

Weiter nach 6.10 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho_n(\lambda)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$

$\Longrightarrow \varrho_n \in \Gamma(M)$ mit $M := \|f\| \cdot \|g\|$

Sei $F_n(z) := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_n(\lambda)}{\lambda - z} \Longrightarrow F_n \in \Gamma^*(M)$

Nach 7.11 $\exists (F_{n_k}) \subset (F_n)$ und $F \in \Gamma^*(M),\ \varrho \in \Gamma(M)$ mit $F_{n_k}(z) \to F(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$

Andererseits nach 8.2 $F_{n_k}(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - z} d\langle g, E_{n_k}(\lambda) f \rangle = \langle g, R(z, A_{n_k}) f \rangle \to \langle g, R(z, A) f \rangle$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z} = \langle g, R(z, A) f \rangle \qquad \square$$

LEMMA 8.4

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *stetig,* $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} |f(\lambda)| = \lim\limits_{|\lambda| \to \infty} |g(\lambda)| = 0$

Sei $\varrho \in \Gamma(M)$ *und* $\Psi(\lambda) := \displaystyle\int_{-\infty}^{\lambda} g(\mu)\, d\varrho(\mu)$

Sei $M' := \sup\limits_{\mu \in \mathbb{R}} |g(\mu)| \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\, d\varrho(\mu)|$

Dann ist $\Psi \in \Gamma(M')$ *und*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\Psi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) g(\lambda)\, d\varrho(\lambda)$$

BEWEIS.

a) (i) Sei $\lambda_1 < \cdots < \lambda_{n+1}$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} |\Psi(\lambda_{j+1}) - \Psi(\lambda_j)| = \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} g(\mu) d\varrho(\mu) \right| \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |g(\lambda)| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} |d\varrho(\mu)|}_{\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\mu)|} \leq M'$$

(ii) $|\Psi(\lambda)| \leq \sup_{-\infty < \mu \leq \lambda} |g(\mu)| * M \to 0 \quad (\lambda \to -\infty)$

(iii) $\varepsilon > 0$.

$$\Psi(\lambda + \varepsilon) - \Psi(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+\varepsilon} g(\mu) d\varrho(\mu) \underset{\text{von7.3}}{\overset{\text{siehe Beweis}}{\longrightarrow}} g(\lambda) \underbrace{(\varrho(\lambda + 0) - \varrho(\lambda))}_{=0} = 0$$

Also ist $\Psi \in \Gamma(M')$

b) Existenz der Integrale nach Blatt 7, Aufgabe 1.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $a < b$, so dass

$$\underbrace{\left| \int_{-\infty}^{a} f(\mu) g(\mu) d\varrho(\mu) \right| + \left| \int_{b}^{\infty} f(\mu) g(\mu) d\varrho(\mu) \right| + \left| \int_{-\infty}^{a} f(\lambda) d\Psi(\lambda) \right| + \left| \int_{b}^{\infty} f(\lambda) d\Psi(\lambda) \right|}_{=:I} \leq$$

Wähle dann Zerlegung $a = \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n+1} = b$, so dass

$$\left| \underbrace{\int_{a}^{b} f(\lambda) g(\lambda) d\varrho(\lambda)}_{=:I_1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) g(\lambda_i) \left(\varrho(\lambda_{i+1}) - \varrho(\lambda_i) \right)}_{=:I_3} \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\left| \underbrace{\int_{a}^{b} f(\lambda) d\Psi(\lambda)}_{=:I_2} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) [\Psi(\lambda_{i+1}) - \Psi(\lambda_i)]}_{=:I_4} \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

und

$$\max_{i=1,\cdots,n} \max_{\mu \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}]} |g(\lambda_i) - g(\mu)| \leq \frac{\varepsilon}{4 * M * \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |f(\lambda)|}$$

$$\begin{aligned}
|I_3 - I_4| &= \left| \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) g(\lambda_i) \underbrace{(\varrho(\lambda_{i+1}) - \varrho(\lambda_i))}_{= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} d\varrho(\mu)} - \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \underbrace{(\Psi(\lambda_{i+1}) - \Psi(\lambda_i))}_{= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} g(\mu) d\varrho(\mu)} \right| = \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} (g(\lambda_i) - g(\mu)) d\varrho(\mu) \right| \leq \\
&\leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |f(\lambda)| \underbrace{\max_{i=1,\cdots,n} \max_{\mu \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}]} |g(\lambda_i) - g(\mu)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{4 * M * \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |f(\lambda)|}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} |d\varrho(\mu)|}_{\leq M} \leq \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

Also

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) g(\lambda) d\varrho(\lambda) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\Psi(\lambda) \right| \leq |I| + |I_1 - I_3| + |I_3 - I_4| + |I_4 - I_2| \leq \varepsilon$$

□

BEMERKUNG.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, $\lim_{|\lambda| \to \infty} |f(\lambda)| = 0$, $\varrho_1,\ \varrho_2 \in \Gamma(M)$, $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\varrho_1(\lambda) + \alpha_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\varrho_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\left(\alpha_1 \varrho_1(\lambda) + \alpha_2 \varrho_2(\lambda)\right)$$

LEMMA 8.5

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert.

Zu $f, g \in H$ sei $\varrho(\cdot, f, g) \in \Gamma(\|f\| \cdot \|g\|)$ mit $\langle f, R(z, A) g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda, f, g)}{\lambda - z}$

Dann gibt es genau eine Spektralschar $E : \mathbb{R} \to B(H)$ mit

$$\varrho(\lambda, f, g) = \langle f, E(\lambda) g \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in H$$

BEWEIS.

a) (i) Seien $\alpha_i \in \mathbb{C},\ f_i \in H\ (i=1,2),\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\ g \in H$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda,g,\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)}{\lambda - z} &\underset{8.3}{\overset{Vor.}{=}} \langle g, R(z,A)(\alpha_1 f_1 \alpha_2 f_2)\rangle = \\
&= \alpha_1\langle g, R(z,A)f_1\rangle + \alpha_2\langle g, R(z,A)f_2\rangle = \\
&\underset{8.3}{=} \alpha_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda,g,f_1)}{\lambda - z} + \alpha_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda,g,f_2)}{\lambda - z} = \\
&\underset{\text{Bem.}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\alpha_1\varrho(\lambda,g,f_1)+\alpha_2\varrho(\lambda,g,f_2))}{\lambda - z} \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\overset{7.7}{\Longrightarrow} \varrho(\lambda,g,\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2) = \alpha_1\varrho(\lambda,g,f_1)+\alpha_2\varrho(\lambda,g,f_2)$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\varrho^*(\lambda,g,f))}{\lambda - z}\right)^* &\underset{\text{klar}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda,g,f)}{\lambda - z^*} \overset{8.3}{=} \langle g, R(z^*,A)f\rangle \overset{3.12}{=} \langle g, R(z,A)f\rangle^* = \\
&= \langle R(z,A)g, f\rangle = \langle f, R(z,A)g\rangle^* = \\
&\overset{8.3}{=} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda,f,g)}{\lambda - z}\right)^*
\end{aligned} \tag{8.1}$$

$$\overset{7.7}{\Longrightarrow} \varrho(\lambda,f,g) = \varrho(\lambda,g,f)^* \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall f,g \in H$$

(iii)

$$|\varrho(\lambda,g,f)| \underset{\varrho(-\infty)=0}{=} \left|\int\limits_{-\infty}^{\lambda} d\varrho(\lambda,g,f)\right| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\lambda,g,f)| \leq \|f\|\cdot\|g\|$$

Also ist für jedes feste $\lambda \in \mathbb{R}$ $\varrho(\lambda,\cdot,\cdot)$ beschränkte, hermitsche Sesquilinearform auf H.
$\underset{7.1}{\overset{\text{FunkAna I}}{\Longrightarrow}} \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \exists_1$ hermitesches $E(\lambda) \in B(H)$ mit $\|E(\lambda)\| \leq 1$
und $\varrho(\lambda,g,f) = \langle g, E(\lambda)f\rangle \quad \forall f,g \in H$

b) $E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda,\mu))$
Für $z_i \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\ z_1 \neq z_2$ gilt:

$$\frac{R(z_1)-R(z_2)}{z_1 - z_2} = R(z_1)R(z_2) \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned}
T &:= \frac{1}{z_1 - z_2}\left(\langle g, R(z_1)f\rangle - \langle g, R(z_2)f\rangle\right) = \\
&\underset{8.3}{=} \frac{1}{z_1 - z_2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\lambda - z_1} - \frac{1}{\lambda - z_2}\right) d\varrho(\lambda,g,f)\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\lambda - z_2)} d\langle g, E(\lambda)f\rangle
\end{aligned}$$

Wegen (8.2) ist andererseits

$$T = \langle g, R(z_1)R(z_2)f\rangle = \langle R(z_1^*)g, R(z_2)f\rangle \overset{8.3}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\langle R(z_1^*)g, E(\lambda)f\rangle}{\lambda - z_2}$$

Es ist $\langle g, E(\cdot)f\rangle \in \Gamma(\|f\| \cdot \|g\|)$

$\overset{8.4}{\Longrightarrow} \sigma(\lambda) := \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \frac{d\langle g, E(\mu)f\rangle}{\mu - z_1} \in \Gamma\left(\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{1}{|\lambda - z_1|}\|g\| \cdot \|f\|\right)$

und $\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z_2}}_{:=F_1(z_2)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\langle g, E(\lambda)f\rangle}{(\lambda - z_2)(\lambda - z_1)} = T = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\langle R(z_1^*)g, E(\lambda)f\rangle}{\lambda - z_2}}_{=:F(z_2)}$

$\underset{\text{holomorph}}{\overset{F_1,F_2}{\Longrightarrow}} F_1(z_1) = F_2(z_2) \quad \forall z_2 \neq z_1$

$\overset{7.7}{\Longrightarrow} \sigma(\lambda) = \langle R(z_1^*)g, E(\lambda)f\rangle$

$$\Longleftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \frac{d\langle g, E(\lambda)f\rangle}{\mu - z_1} \quad = \quad \langle E(\lambda)f, R(z_1^*)g\rangle^* \overset{8.3}{=} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\langle E(\lambda)f, E(\mu)g\rangle}{\mu - z_1^*}\right)^* =$$

$$\overset{(8.1)}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\langle E(\mu)g, E(\lambda)f\rangle}{\mu - z_1} \quad \forall z_1 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \quad \underbrace{\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in H}_{\text{beliebig aber fest}} \tag{8.3}$$

Setze $\tau(\mu) := \begin{cases} \langle g, E(\mu)f\rangle, & \text{für } \mu < \lambda \\ \langle g, E(\lambda)f\rangle, & \text{für } \mu \geq \lambda \end{cases}$

$$\lim_{\substack{\mu\to-\infty \\ \mu<\lambda}} \tau(\mu) = \lim_{\mu\to-\infty} \underbrace{\langle g, E(\mu)f\rangle}_{=\varrho(\mu,g,f)} = 0$$

τ rechtsstetig, da $\langle g, E(\cdot)f\rangle$ rechtsstetig.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |d\tau(\mu)| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |d\varrho(\mu, g, f)| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad \text{(klar: Betrachte Zerlegungssummen)}$$

$\Longrightarrow \tau \in \Gamma(\|f\| \cdot \|g\|)$

Weiter ist

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau(\mu)}{\mu - z_1} = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \frac{d\tau(\mu)}{\mu - z_1} = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \frac{d\langle g, E(\mu)f\rangle}{\mu - z_1} \overset{(8.3)}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\langle E(\mu)g, E(\lambda)f\rangle}{\mu - z_1}$$

Beachte $\forall z_1 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$\langle E(\cdot)g, E(\lambda)f\rangle = \langle g, E(\cdot)E(\lambda)f\rangle = \varrho(\cdot, g, E(\lambda)f) \in \Gamma(\|g\| \cdot \underbrace{\|E(\lambda)f\|}_{\leq\|f\|}) \subset \Gamma(\|g\| \cdot \|f\|)$$

$\underset{7.7}{\Longrightarrow} \tau(\mu) = \langle g, E(\mu)E(\lambda)f\rangle$

d.h. $\langle g, E(\mu)E(\lambda)f\rangle = \begin{cases} \langle g, E(\mu)f\rangle, & \text{für } \mu \leq \lambda \\ \langle g, E(\lambda)f\rangle, & \text{für } \mu \geq \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in H$

$\Longrightarrow E(\mu)E(\lambda) = E(\min(\lambda, \mu)) \quad \forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$

c) $E(\lambda)$ Projektor:

Aus a) $E(\lambda)$ hermitesch
Aus b) mit $\mu = \lambda \Longrightarrow E(\lambda)^2 = E(\lambda)$

d) $E(\lambda)$ rechtsstetig:

Sei $(\lambda_n) \subset \mathbb{R},\ \lambda_n > \lambda_0,\ \lambda_n \to \lambda_0$

(i) $\langle g, E(\lambda_n)f\rangle = \varrho(\lambda_n, g, f) \to \varrho(\lambda_0, g, f) = \langle g, E(\lambda_0)f\rangle$
$\Longrightarrow E(\lambda_n)f \xrightarrow{w} E(\lambda_0)f$

(ii) $\|E(\lambda_n)f\|^2 = \langle E(\lambda_n)f, E(\lambda_n)f\rangle = \langle f, E(\lambda_n)f\rangle \to \langle f, E(\lambda_o)f\rangle = \|E(\lambda_0)f\|^2$
$\overset{\text{FunkAna I}}{\underset{9.4}{\Longrightarrow}} E(\lambda_n)f \xrightarrow{s} E(\lambda_0)f$

e) Sei $\lambda_n \to +\infty$

(i) $\|E(\lambda_n)f\| \leq \|f\|$
$\overset{\text{FunkAna I}}{\underset{\text{schw. komp.}}{\Longrightarrow}}$ Es gibt Teilfolge $(\lambda_{n_k}) \subset (\lambda_n)$ und ein $f_0 \in H$ mit $E(\lambda_{n_k})f \xrightarrow{w} f_0$

(ii) Ist (λ_{n_j}) Teilfolge mit $E(\lambda_{n_j})f \xrightarrow{w} f_1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{n_j} \to +\infty$
Sei $g := f - f_1$.
Für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\ h \in H$ ist

$$\langle h, R(z)g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\langle h, E(\lambda)g\rangle}{\lambda - z} \tag{8.4}$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\langle h, E(\lambda)g\rangle = \langle h, E(\lambda)(f - f_1)\rangle = \langle E(\lambda)h, f - f_1\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle E(\lambda)h, f - E(\lambda_{n_j})f\rangle$$

$\exists j_0 \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_{n_j} \geq \lambda \quad \forall j \geq j_0$
$\Longrightarrow \langle E(\lambda)h, f - E(\lambda_{n_j})f\rangle = \langle h, E(\lambda)f - \underbrace{E(\lambda)E(\lambda_{n_j})}_{=E(\lambda)} f\rangle$
$\Longrightarrow \langle h, E(\lambda)g\rangle = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\overset{(8.4)}{\Longrightarrow} \langle h, R(z)g\rangle = 0 \quad \Longrightarrow 0 = \langle R(z^*)h, g\rangle \quad \forall h \in H$
$R(z^*)H = D(A)$ dicht in H $\quad \Longrightarrow g = 0 \quad \Longrightarrow f = f_1$

(iii) Angenommen, $E(\lambda_n)f)$ würde nicht gegen f konvergieren.
$\Longrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ und Teilfolge $(\lambda_{n_j}) \subset (\lambda_n)$ mit

$$\|E(\lambda_{n_i})f - f\| \geq \varepsilon_0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{8.5}$$

Nach (i) $(\|E(\lambda_{n_i})f\| \leq \|f\|)$ existiert Teilfolge $(\lambda_{n_i'}) \subset (\lambda_{n_i})$ und f_1 mit $E(\lambda_{n_i'})f \xrightarrow{w} f_1$
Nach (ii) ist $f_1 = f$.
Weiter

$$\|E(\lambda_{n_i'})\|^2 = \langle f, E(\lambda_{n_i'})f\rangle \to \langle f, f\rangle = \|f\|^2$$

$\Longrightarrow E(\lambda_{n_i'})f \xrightarrow{s} f$, Widerspruch zu (8.5)

f) Sei $\lambda_n \to -\infty$

$$\|E(\lambda_n)f\|^2 = \langle f, E(\lambda_n)f\rangle = \varrho(\lambda_n, f, f) \to 0$$

□

SATZ 8.6

Sei H separabler Hilbertraum, $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert.
Dann gibt es genau eine Spektralschar $E : \mathbb{R} \to B(H)$, derart dass

$$R(z) = (A - z)^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE(\lambda)}{\lambda - z} \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$$

BEWEIS.
Nach Satz 8.5 existiert Spektralschar E mit

$$\langle g, R(z)f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\langle g, E(\lambda)f\rangle}{\lambda - z} \tag{8.6}$$

Nach 6.12 existiert $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE(\lambda)}{\lambda - z} \in B(H)$ und nach 6.10 (Limesbetrachtung) gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\langle g, E(\lambda)g\rangle}{\lambda - z} = \left\langle g, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE(\lambda)}{\lambda - z} f \right\rangle$$

$\overset{(8.6)}{\Longrightarrow} \langle g, R(z)f\rangle = \left\langle g, \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE(\lambda)}{\lambda - z} f \right\rangle \quad \forall f, g \in H$

$\Longrightarrow R(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE(\lambda)}{\lambda - z}$

Sei $\tilde{E}$ eine weitere Spektralschar mit $R(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{E}(\lambda)}{\lambda - z} \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\langle g, E(\lambda)f\rangle}{\lambda - z} \overset{(8.6)}{=} \langle g, R(z)f\rangle = \left\langle g, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{E}(\lambda)}{\lambda - z} f \right\rangle \underset{6.10}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\langle g, \tilde{E}(\lambda)f\rangle}{\lambda - z} \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\ \forall f, g \in H$$

Es gilt $\langle g, \tilde{E}(\cdot)f\rangle \in \Gamma(\|f\| \cdot \|g\|)$ nach 6.10 und wegen

$$\begin{aligned} \langle g, \tilde{E}(\lambda + \varepsilon)f\rangle &\to \langle g, \tilde{E}(\lambda)f\rangle \quad (\varepsilon \to 0) \\ \langle g, \tilde{E}(\lambda)f\rangle &\to \langle g, 0\rangle = 0 \quad (\lambda \to -\infty) \end{aligned}$$

$\overset{7.7}{\Longrightarrow} \langle g, E(\lambda)f\rangle = \langle g, \tilde{E}(\lambda)f\rangle \quad \forall f, g \in H \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow E = \tilde{E}$ $\square$

9. Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Generalvoraussetzung: H separabler, komplexer Hilbertraum

LEMMA 9.1

Sei $E : \mathbb{R} \to B(H)$ Spektralschar und $f \in H$.

Dann existiert $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda) f := \lim\limits_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_a^b \lambda dE(\lambda) f$ *genau dann, wenn* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2$ *existiert.*

BEWEIS.

„$\Longleftarrow$": siehe Blatt 7, Aufgabe 2

„$\Longrightarrow$": Es gilt:

$$\left\| \int\limits_a^b \lambda dE(\lambda) f \right\|^2 \underset{6.11}{=} \left\langle f, \left(\int\limits_a^b \lambda dE(\lambda) \right) \circ \left(\int\limits_a^b \lambda dE(\lambda) \right) f \right\rangle \underset{6.14}{=} \left\langle f, \int\limits_a^b \lambda^2 dE(\lambda) f \right\rangle =$$

$$\underset{6.10}{=} \int\limits_a^b \lambda^2 d\langle f, E(\lambda) f\rangle = \int\limits_a^b \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2$$

$$\exists \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_a^b \lambda dE(\lambda) \overset{\text{Stetigkeit}}{\underset{\text{Norm}}{\Longrightarrow}} \exists \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \left\| \int\limits_a^b \lambda dE(\lambda) f \right\| \Longleftrightarrow \exists \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_a^b \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2$$

□

SATZ 9.2

Sei $E : \mathbb{R} \to B(H)$ *eine Spektralschar,* $D := \{f \in H : \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2$ *existiert*$\}$.
Dann ist D *dichter Untervektorraum von* H *und* $A : D \to H$,

$$Af := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda)f := \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int\limits_a^b \lambda dE(\lambda)f$$

ist selbsadjungiert.

BEWEIS. D Untervektorraum

(i) Sei $I := [\tilde{\lambda}, \lambda],\ \tilde{\lambda} < \lambda,\ \alpha_i \in \mathbb{C},\ f_i \in H \quad (i = 1, 2)$
Sei $E(I) := E(\lambda) - E(\tilde{\lambda})$

$$\begin{aligned}
\|E(I)(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\|^2 &= \|\alpha_1 E(I)f_1\|^2 + \|\alpha_2 E(I)f_2\|^2 + 2\Re\alpha_1^*\alpha_2\langle E(I)f_1, E(I)f_2\rangle \le \\
&\le \|\alpha_1 E(I)f_1\|^2 + \|\alpha_2 E(I)f_2\|^2 + \\
&\quad +2|\alpha_1|\,\|E(I)f_1\|\,|\alpha_2|\,\|E(I)f_2\| \underset{2|ab|\le|a|^2+|b|^2}{\le} \\
&\le 2|\alpha_1|^2\|E(I)f_1\| + 2|\alpha_2|^2\|E(I)f_2\|^2
\end{aligned}$$

Sei nun $a = \lambda_1^{(n)} < \cdots < \lambda_{k_n+1}^{(n)} = b$ Zerlegungsfolge mit Feinheit $\to 0$.
Sei $I_j^{(n)} := [\lambda_j^{(n)}, \lambda_{j+1}^{(n)}]$

$$\sum_{j=1}^{k_n} \left(\lambda_j^{(n)}\right)^2 \|E(I_j^{(n)})(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\|^2 \le$$

$$\le 2|\alpha_1|^2 \sum_{j=1}^{k_n} \left(\lambda_j^{(n)}\right)^2 \|E(I_j^{(n)})f_1\|^2 + 2|\alpha_2|^2 \sum_{j=1}^{k_n} \left(\lambda_j^{(n)}\right)^2 \|E(I_j^{(n)})f_2\|^2$$

$$\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \int\limits_a^b \lambda^2 d\underbrace{\|E(\lambda)(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\|^2}_{=\varphi(\lambda)} \le$$

$$\le 2|\alpha_1|^2 \int\limits_a^b \lambda^2 d\underbrace{\|E(\lambda)f_1\|^2}_{=:\varphi_1(\lambda)} + 2|\alpha_2|^2 \int\limits_a^b \lambda^2 d\underbrace{\|E(\lambda)f_2\|^2}_{=:\varphi_2(\lambda)} \quad \forall a < b \in \mathbb{R}$$

Seien nun $f_1, f_2 \in D,\ b_n \to +\infty$

$$\Longrightarrow \left|\int\limits_0^{b_n} \lambda^2 d\varphi(\lambda) - \int\limits_0^{b_m} \lambda^2 d\varphi(\lambda)\right| \le 2|\alpha_1|^2 \underbrace{\int\limits_{b_n}^{b_m} \lambda^2 d\varphi_1(\lambda)}_{\to 0 \quad (n,m\to\infty)} + 2|\alpha_2|^2 \underbrace{\int\limits_{b_n}^{b_m} \lambda^2 d\varphi_2(\lambda)}_{\to 0 \quad (n,m\to\infty)}$$

Genauso zeigt man die Unabhängigkeit von der gewählten Folge

$\Longrightarrow \exists \int\limits_{0}^{\infty} \lambda^2 d\varphi(\lambda)$ und analog $\exists \int\limits_{-\infty}^{0} \lambda^2 d\varphi(\lambda)$

D.h. $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in D$

(ii) $A : D \to H$ linear:

Seien $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $f_i \in D$ $(i = 1, 2)$. Für $a < b$:

$$\underbrace{\int\limits_a^b \lambda dE(\lambda)}_{\in B(H)}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \int\limits_a^b \lambda dE(\lambda) f_1 + \alpha_2 \int\limits_a^b \lambda dE(\lambda) f_2$$

mit Lemma 9.1 und $a \to -\infty$ und $b \to +\infty$ geht dies gegen

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 A f_1 + \alpha_2 A f_2$$

(iii) D dicht in H:

Sei $f \in H$
Sei $I := [a, b]$, $g := E(I)f$.

Zeige: $g \in D$

$$\begin{aligned} E(\lambda)g &= E(\lambda)(E(b) - E(a))f = E(\lambda)E(b)f - E(\lambda)E(a)f = \\ &= \begin{cases} \lambda \leq a & : \ E(\lambda)f - E(\lambda)f = 0 \\ a \leq \lambda \leq b & : \ E(\lambda)f - E(a)f \\ \lambda \geq b & : \ E(b)f - E(a)f = g \end{cases} \end{aligned}$$

Für $a \leq \lambda \leq b$ ist

$$\|E(\lambda)g\|^2 = \langle g, E(\lambda)g\rangle = \underbrace{\langle g, E(\lambda)f\rangle}_{=\langle E(\lambda)g, f\rangle} - \langle g, E(a)f\rangle = \langle E(\lambda)f, f\rangle \underbrace{- \langle E(a)f, f\rangle - \langle g, E(a)f\rangle}_{\text{konstant bezgl. } \lambda}$$

D.h. für $c < a < b < d$:

$$\int\limits_c^d \lambda^2 d\|E(\lambda)g\|^2 = \int\limits_a^b \lambda^2 d\|E(\lambda)g\|^2 = \int\limits_a^b \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2$$

$\Longrightarrow \exists \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)g\|^2 = \int\limits_a^b \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2$

$\Longrightarrow g \in D$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$g_n := E(n)f - E(-n)f$$

$\Longrightarrow g_n \in D$ und $g_n \to f \quad (n \to \infty)$

(iv) A hermitisch:

Sei $a_n \to -\infty$, $b_n \to +\infty$, $a_n < b_n$. Seien $f, g \in D$.

$$\begin{aligned}\langle Af, g\rangle &= \left\langle \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} \lambda dE(\lambda) f, g \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \int_{a_n}^{b_n} \lambda dE(\lambda) f, g \right\rangle = \\ &\underset{6.11}{=} \lim_{n\to\infty} \left\langle f, \int_{a_n}^{b_n} \lambda dE(\lambda) f, g \right\rangle = \langle f, Ag\rangle\end{aligned}$$

(v) A selbstadjungiert:

Nach 2.11 genügt es zu zeigen: $(A-z)D = H \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

Sei $g \in H$.

Setze $f := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE(\lambda)}{\lambda - z} g$ (Existenz nach 6.12)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Seien $c_n \to -\infty$, $d_n \to +\infty$ mit $c_n < a < b < d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Sei $f_n := \int_{c_n}^{d_n} \frac{dE(\lambda)}{\lambda - z} g$

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda - z) dE(\lambda) f_n &= \left(\int_a^b (\lambda - z) dE(\lambda)\right) \circ \left(\int_{c_n}^{d_n} \frac{dE(\lambda)}{\lambda - z}\right) g = \\ &= \underbrace{\int_a^b (\lambda - z) dE(\lambda) \int_{c_n}^{a} \frac{dE(\lambda)}{\lambda - z} g}_{\underset{6.13}{=} 0} + \int_a^b (\lambda - z) dE(\lambda) \int_a^b \frac{dE(\lambda)}{\lambda - z} g + \\ &\quad \underbrace{+ \int_a^b (\lambda - z) dE(\lambda) \int_b^{d_n} \frac{dE(\lambda)}{\lambda - z} g}_{\underset{6.13}{=} 0} = \\ &\underset{6.14}{=} \int_a^b dE(\lambda) g = (E(b) - E(a))g\end{aligned}$$

Da $f_n \to f$ und $\int_a^b (\lambda - z) dE(\lambda) \in B(H)$ folgt für $n \to \infty$:

$$\int_a^b (\lambda - z) dE(\lambda) f = (E(b) - E(a))g$$

$$\Longrightarrow \int_a^b \lambda dE(\lambda)f = z(E(b)-E(a))f + (E(b)-E(a))g \to zf+g \quad (a \to -\infty, b \to +\infty)$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b \lambda dE(\lambda)f \in H$$

$$\overset{\text{Lemma 9.1}}{\Longrightarrow} f \in D \text{ und } \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda)f = Af$$

$$\Longrightarrow (A-z)f = g$$

Also $(A-z)D = H$

□

SATZ 9.3 **Spektralsatz**

Sei H seperabler, komplexer Hilbertraum. Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert.
Dann gibt es genau eine Spektralschar $E : \mathbb{R} \to B(H)$ mit

a) $D(A) = \left\{ f \in H \ : \ \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2 \text{ existiert} \right\}$

b) $Af = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda)f \quad \forall f \in D(A)$

BEWEIS.

(i) Nach 8.6 gibt es genau eine Spektralschar $E : \mathbb{R} \to B(H)$ mit

$$R(z,A)f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE(\lambda)}{\lambda - z} f \quad \forall f \in H \ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$$

(ii) Sei $I := [a,b],\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b,\ E(I) := E(b) - E(a)$

Zeige: $E(I)H \subset D(A)$ und $AE(I)f = \int_a^b \lambda dE(\lambda)f \quad \forall f \in H$

Sei $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\ c < a < b < d$

$$\implies \left(\int_c^d \frac{dE(\lambda)}{\lambda - z}\right) \circ \left(\int_a^b (\lambda - z) dE(\lambda)\right) f \underset{6.14}{\overset{6.13}{=}} \int_a^b dE(\lambda) f = E(I) f$$

$$\underset{d\to+\infty}{\overset{c\to-\infty}{\implies}} \quad \underbrace{R(z,A)\int_a^b (\lambda - z) dE(\lambda) f}_{\in D(A)} = E(I) f$$

$$\text{und} \quad (A - z)E(I)f = \int_a^b (\lambda - z) dE(\lambda) f = \int_a^b \lambda dE(\lambda) f - zE(I)f$$

$$\implies \quad AE(I)f = \int_a^b \lambda dE(\lambda) f$$

(iii) Sei $f \in D(A)$.

Zeige: $E(I)Af = \displaystyle\int_a^b \lambda dE(\lambda) f$

$$\begin{aligned}
\langle g, E(I)Af\rangle &= \langle \underbrace{E(I)g}_{\in D(A)}, Af\rangle = \langle AE(I)g, f\rangle \underset{\text{(ii)}}{=} \left\langle \int_a^b \lambda dE(\lambda) g, f \right\rangle = \\
&\underset{6.11}{=} \left\langle g, \int_a^b \lambda dE(\lambda) f \right\rangle \quad \forall g \in H \\
\implies E(I)Af &= \int_a^b \lambda dE(\lambda) f
\end{aligned}$$

(iv) Sei $f \in D(A),\ a_n \to -\infty,\ b_n \to +\infty,\ I_n := [a_n, b_n]$

$$\int_{a_n}^{b_n} \lambda dE(\lambda) f \underset{\text{(iii)}}{=} E(I_n)Af = E(b_n)Af - E(a_n)Af \underset{(a\to\infty)}{\longrightarrow} Af$$

$$\implies \exists \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} \lambda dE(\lambda) f = Af$$

$$\overset{9.1}{\implies} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2 \text{ existiert}$$

(v) Sei $f \in H$ und $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2$ existiere

$\underset{9.1}{\Longrightarrow} \exists \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{a_n}^{b_n} \lambda dE(\lambda)f$

Es ist

$$f_n := (E(b_n) - E(a_n))f \longrightarrow f \quad (n \to \infty)$$

und

$$f_n = E(I_n)f \in D(A)$$

Weiter

$$Af_n = AE(I_n)f \underset{\text{(ii)}}{=} \int\limits_{a_n}^{b_n} \lambda dE(\lambda)f \underset{9.1}{\longrightarrow} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda)f$$

$\overset{A \text{ abgeschl.}}{\Longrightarrow} f \in D(A) \quad \text{und} \quad Af = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda)f$

(vi) Eindeutigkeit:

Sei $\widetilde{E}$ Spektralschar mit

$$Af = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\widetilde{E}(\lambda) \quad \forall f \in D(A)$$

Sei $a_n \to -\infty,\ b_n \to +\infty,\ I_n := [a_n, b_n],\ I = [a, b]$ und $a_n < a < b < b_n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad \int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{d\widetilde{E}(\lambda)}{\lambda - z} \int\limits_a^b (\lambda - z) d\widetilde{E}(\lambda) = \int\limits_a^b d\widetilde{E}(\lambda) = \widetilde{E}(I)$$

$$\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\widetilde{E}(\lambda)}{\lambda - z}\right)}_{\in B(H)} \left(\int\limits_a^b (\lambda - z) d\widetilde{E}(\lambda)\right) f = (\widetilde{E}(b) - \widetilde{E}(a))f \quad \forall a < b$$

Nun ist $\widetilde{E}(b)f - \widetilde{E}(a)f \longrightarrow f \quad (a \to -\infty,\, b \to +\infty)$

$$\underset{b\to+\infty}{\overset{a\to-\infty}{\Longrightarrow}} \quad \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\widetilde{E}(\lambda)}{\lambda - z}\right)(A - z)f = f$$

$$\Longrightarrow \quad R(z, A)f = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\widetilde{E}(\lambda)}{\lambda - z} f$$

$$\underset{\text{Eind.}}{\overset{8.6}{\Longrightarrow}} \quad E = \tilde{E}$$

$\square$

10. Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators

Generalvorraussetzung: Sei H seperabler Hilbertraum

DEFINITION 10.1

Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ I := [a, b]$. Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert, $E : \mathbb{R} \to B(H)$ Spektralschar mit

$$Af = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda) f \quad \forall f \in D(A)$$

Dann heißt

$$M(I) := E(I)H$$

der zu I gehörige ***Spektralraum****.*

BEMERKUNG.

(i) $M(I) \subset D(A)$ nach Beweis von 9.3

(ii) $Ag = \int\limits_a^b \lambda dE(\lambda) g \quad \forall g \in M(I)$ nach Beweis von 9.3

(iii) Sei $I' := [c, d],\ C \leq a < b \leq d$
Dann gilt:

$$M(I) \subset M(I')$$

denn

$$\begin{aligned}(E(d) - E(c))(E(b) - E(a)) &= E(d)E(b) - E(c)E(b) - E(d)E(a) + E(c)E(a) = \\ &= E(b) - E(c) - E(a) + E(c) = \\ &= E(b) - E(a)\end{aligned}$$

SATZ 10.2

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert. Sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Dann ist $\lambda_0 \in \sigma(A)$ genau dann, wenn für jedes kompakte Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 \in \overset{\circ}{I}$ gilt:

$$\dim M(I) > 0$$

BEWEIS.

"$\Longrightarrow$": Angenommen $\exists\, I = [a,b]$ mit $\lambda_0 \in \overset{\circ}{I}$ mit $\dim M(I) = 0$

$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad \text{mit} \quad I_0 := [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon] \subset \overset{\circ}{I}$

Nach Bem. ist $M(I_0') \subset M(I_0) \subset M(I) \quad \forall I_0' \subset I_0$

$$\Longrightarrow E(\lambda) = E(\lambda_0) \quad \forall \lambda \in I_0 \tag{10.1}$$

Es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE(\lambda)f = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b dE(\lambda)f = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} (E(b)f - E(a)f) = f$$

Für $f \in D(A)$ ist dann

$$(A - \lambda_0)f = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)dE(\lambda)f$$

Sei $a_n \to -\infty,\ b_n \to +\infty,\ a_n < \lambda_0 - \varepsilon < \lambda_0 + \varepsilon < b_n$

$$\int_{a_n}^{b_n} (\lambda - \lambda_0)dE(\lambda)f = \int_{a_n}^{\lambda_0-\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)dE(\lambda)f + \underbrace{\int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)dE(\lambda)f}_{\underset{(10.1)}{=}\ 0} + \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{b_n} (\lambda - \lambda_0)dE(\lambda)f$$

$$\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \quad (A - \lambda_0)f = \int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)dE(\lambda)f + \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)dE(\lambda)f$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \|(A - \lambda_0)f\|^2 \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 d\|E(\lambda)f\|^2 + \int_{\lambda_o+\varepsilon}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 d\|E(\lambda)f\|^2 \underset{\text{und Ana III}}{\overset{\text{nach 6.9}}{\geq}} \\
&\geq \quad \varepsilon^2 \left(\int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon} d\|E(\lambda)f\|^2 + \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{+\infty} d\|E(\lambda)f\|^2 \right) = \\
&\overset{(10.1)}{=} \quad \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\|E(\lambda)f\|^2 \underset{6.10}{=} \varepsilon^2 \left\langle f, \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dE(\lambda)f}_{=f} \right\rangle = \varepsilon^2\|f\|^2 \quad \forall f \in D(A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \|(A-\lambda_0)f\| \geq \varepsilon\|f\| \quad \forall f \in D(A) \\ &\overset{3.3}{\Longrightarrow} \quad \lambda_0 \in \varphi(A) \end{aligned}$$

"$\Longleftarrow$": a) Sei $\varepsilon > 0,\ I_\varepsilon := [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} \quad \dim M(I_\varepsilon) > 0 \\ &\Longrightarrow \quad \exists \varphi_\varepsilon \in M(I_\varepsilon) : \|\varphi_\varepsilon\| = 1 \\ \varphi_\varepsilon \in M(I_\varepsilon) \quad &\Longrightarrow \quad R(I_\varepsilon)\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \\ &\Longrightarrow \quad \int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} dE(\lambda)\varphi_\varepsilon = E(I_\varepsilon)\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \end{aligned}$$

und nach Bemerkung

$$\begin{aligned} A\varphi_\varepsilon \quad &= \quad \int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} \lambda dE(\lambda)\varphi_\varepsilon \\ \Longrightarrow (A-\lambda_0)\varphi_\varepsilon \quad &= \quad \int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} (\lambda-\lambda_0) dE(\lambda)\varphi_\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \|(A-\lambda_0)\varphi_\varepsilon\|^2 \quad &= \quad \int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} (\lambda-\lambda_0)^2 d\|E(\lambda)\varphi_\varepsilon\|^2 \underset{\text{und Ana III}}{\overset{6.9}{\leq}} \\ &\leq \quad \varepsilon^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\|E(\lambda)\varphi_\varepsilon\|^2 = \varepsilon^2 \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left(\|E(b)\varphi_\varepsilon\|^2 - \|E(a)\varphi_\varepsilon\|^2\right) = \\ &= \quad \varepsilon^2\|\varphi_\varepsilon\|^2 = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

b) Nach a) gibt es mit $\varepsilon := \frac{1}{n}$ eine Folge $(\varphi_n) \subset D(A)$ mit $\|\varphi_n\| = 1$ und $\|(A-\lambda_0)\varphi_n\| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \lambda_0 \notin \varphi(A)$

$\square$

LEMMA 10.3

Sei $E : \mathbb{R} \to B(H)$ Spektralschar. Sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.
Dann existiert für jedes $f \in H$

$$E(\lambda_0 - 0)f := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \varepsilon>0}} E(\lambda_0 - \varepsilon)f$$

Weiter ist $E(\lambda_0 - 0)$ Projektor und

$$E(\lambda)E(\lambda_0 - 0) = \begin{cases} E(\lambda) & \textit{für} \quad \lambda < \lambda_0, \\ E(\lambda_0 - 0) & \textit{für} \quad \lambda \geq \lambda_0 \end{cases}$$

BEWEIS.

(i) Sei $(\mu_n) \subset \mathbb{R}$ mit $\mu_n \leq \mu_{n+1} \leq \cdots < \lambda_0\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \to \lambda_0$.
Sei $E_n := E(\mu_n)$.
Für $f \in H$:

$$\|E_n f\| = \|E_n E_{n+1} f\| \leq \underbrace{\|E_n\|}_{=1} \|E_{n+1} f\| \overset{\text{analog}}{\leq} \|E(\lambda_0) f\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow (\|E_n f\|) \subset \mathbb{R}$ monoton wachsend und beschränkt $\quad \Longrightarrow$ konvergent

(ii) Für $n \geq m$ ist

$$\|E_n f - E_m f\|^2 = \|E_n f\|^2 + \|E_m f\|^2 - 2\Re \underbrace{\langle E_n f, E m f\rangle}_{=\langle E_n f, f\rangle} = \|E_n f\|^2 - \|E_m f\|^2 \tag{10.2}$$

$\Longrightarrow (E_n f)$ Cauchyfolge in H
$\Longrightarrow \exists g := \lim\limits_{n\to\infty} E_n f \in H$

$$\underset{n\to\infty}{\overset{(10.2)}{\Longrightarrow}} \quad \|g - E_m f\|^2 = \|g\|^2 - \|E_m f\|^2 \tag{10.3}$$

(iii) Sei nun $(\lambda_k) \subset \mathbb{R},\ \lambda_k < \lambda_n,\ \lambda_k \to 0$.
Zeige: $E(\lambda_k) f \to g$
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben

$$\begin{aligned} &\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \|g - E_n f\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0 \\ \Longrightarrow \quad &\exists k_0 \in \mathbb{N}: \ \mu_{n_0} \leq \lambda_k < \lambda_0 \quad \forall k \geq k_0 \end{aligned}$$

Sei $k \geq k_0$ beliebig, aber fest
$\exists n_1 = n_1(k) > n_0 \quad$ mit $\quad \mu_{n_0} \leq \lambda_k \leq \mu_{n_1} \leq \mu_n \quad \forall n \geq n_1$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & \|E(\mu_{n_0}) f\| \leq \|E(\lambda_k) f\| \leq \|E(\mu_n) f\| \leq \|g\| \quad \forall n \geq n_1 \\ \Longrightarrow \quad & \|E(\lambda_k) f - E(\mu_{n_0}) f\|^2 \underset{(10.2)}{\overset{\text{siehe}}{=}} \|E(\lambda_k) f\|^2 - \|E(\mu_{n_0}) f\|^2 \leq \|g\|^2 - \|E(\mu_{n_0})\|^2 = \\ & \underset{(10.3)}{=} \|g - E(\mu_{n_0}) f\|^2 \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \\ \Longrightarrow \quad & \|g - E(\lambda_k) f\| \leq \|g - E(\mu_{n_0}) f\| + \|E(\mu_{n_0}) f - E(\lambda_k) f\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \\ \Longrightarrow \quad & \exists\, E(\lambda_0 - 0) : H \to H \end{aligned}$$

(iv) $E(\lambda_0 - 0) \in B(H)$
Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},\ f_1, f_2 \in H$

$$\begin{aligned} E(\lambda_0 - 0)(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= \lim_{n\to\infty} E(\lambda_n)(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \\ &= \lambda_1 \lim_{n\to\infty} E(\lambda_n) f_1 + \lambda_2 \lim_{n\to\infty} E(\lambda_n) f_2 = \\ &= \lambda_1 E(\lambda_0 - 0) f_1 + \lambda_2 E(\lambda_0 - 0) f_2 \end{aligned}$$

$$\|E(\lambda_n)f\| \leq \|f\| \quad \overset{\rightharpoonup}{\Longrightarrow} \quad \|E(\lambda_0 - 0)f\| \leq \|f\|$$

(v)

$$\langle E(\lambda_0 - 0)f, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle E(\lambda_n)f, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, E(\lambda_n)g\rangle = \langle f, E(\lambda_0 - 0)g\rangle$$

(vi)

$$\begin{aligned} \langle E(\lambda_0 - 0)^2 f, g\rangle &= \langle E(\lambda_0 - 0)f, E(\lambda_0 - 0)g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle E(\lambda_n)f, E(\lambda_n)g\rangle = \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle E(\lambda_n)f, g\rangle = \langle E(\lambda_0 - 0)f, g\rangle \\ &\overset{\forall f,g\in H}{\Longrightarrow} E(\lambda_0 - 0)^2 = E(\lambda_0 - 0) \end{aligned}$$

(vii)

$$\langle E(\lambda)E(\lambda_0 - 0)f, g\rangle = \langle E(\lambda - 0)f, E(\lambda)g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle E(\lambda_n)f, E(\lambda)g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle E(\min(\lambda, \lambda_n)f, g\rangle$$

Ist $\lambda < \lambda_0 \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \lambda_n \geq \lambda \quad \forall n \geq n_0$

$$\implies \langle E(\lambda)E(\lambda_0 - 0)f, g\rangle = \langle E(\lambda)f, g\rangle$$

Ist $\lambda \geq \lambda_0 \implies \lambda_n \leq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\implies \langle E(\lambda)E(\lambda_0 - 0)f, g\rangle = \langle E(\lambda_0 - 0)f, g\rangle$$

$\square$

SATZ 10.4

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert, $E : \mathbb{R} \to B(H)$ Spektralschar mit

$$Af = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda)f \quad \forall f \in D(A)$$

Dann ist $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A genau dann, wenn $E(\lambda_0) \neq E(\lambda_0 - 0)$.

BEWEIS.

a) Es gelte: $P := E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0) \neq 0$

P ist Projektor (nachrechnen)

$P \neq 0 \implies \exists f_0 \in H : \ g_o := Pf_0 \neq 0$

(i) Zeige $\forall \delta > 0$ sei $I_\delta := [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ und es gilt $E(I_\delta)g_0 = g_0$, d.h. $g_0 \in M(I_\delta)$

$$\begin{aligned} E(I_\delta)g_0 &= (E(\lambda_0 + \delta) - E(\lambda_0 - \delta))(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))f_0 = \\ &\underset{10.3}{=} (E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - \delta) - E(\lambda_0 - 0) + E(\lambda_0 - \delta))f_0 = Pf_0 = g_0 \end{aligned}$$

(ii) Zeige: $Ag_0 = \lambda_0 g_0$

Sei $\delta > 0$

$$\Longrightarrow (A-\lambda_0)g_0 = (A-\lambda_0)E(I_\delta)g_0 \underset{9.2\text{ ii}}{=} \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} (\lambda-\lambda_0)\,dE(\lambda)g_0$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \|(A-\lambda_0)g_0\|^2 &= \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} (\lambda-\lambda_0)^2 d\|E(\lambda)g_0\|^2 \leq \\
&\leq \delta^2 \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} d\|E(\lambda)g_0\|^2 = \delta^2\|E(I_\delta)g_0\|^2 \leq \\
&\leq \delta^2\|g_0\|^2 \underset{(\delta\to 0)}{\longrightarrow} 0 \\
\Longrightarrow \|(A-\lambda_0)g_0\| &= 0
\end{aligned}$$

b) Sei $g_0 \in H,\ \|g_0\| = 1,\ Ag_0 = \lambda_0 g_0$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow 0 &= (A-\lambda_0)g_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda-\lambda_0)\,dE(\lambda)g_0 \\
\Longrightarrow 0 &= \|(A-\lambda_0)g_0\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda-\lambda_0)d\|E(\lambda)g_0\|^2 \geq \\
&\geq \int_{-\infty}^{\lambda_0-\delta} (\lambda-\lambda_0)^2 d\|E(\lambda)g_0\|^2 + \int_{\lambda_0+\delta}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2 d\|E(\lambda)g_0\|^2 \geq \\
&\geq \delta^2\left(\int_{-\infty}^{\lambda_0-\delta} d\|E(\lambda)g_0\|^2 + \int_{\lambda_0+\delta}^{\infty} d\|E(\lambda)g_0\|^2\right) = \\
&= \delta^2\left(\|E(\lambda_0-\delta)g_0\|^2 + \|g_0\|^2 - \|E(\lambda_0+\delta)g_0\|^2\right) = \\
&= \delta^2\langle g_0 - (E(\lambda_0+\delta) - E(\lambda_0-\delta))g_0, g_0\rangle
\end{aligned}$$

Da $I - (E(\lambda_0+\delta) - E(\lambda_0-\delta))$ Projektor und Funkana I, 6.7

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad 0 \geq \delta^2\|g_0 - (E(\lambda_0+\delta) - E(\lambda_0-\delta))g_0\|^2 \\
&\Longrightarrow \quad g_0 = (E(\lambda_0+\delta) - E(\lambda_0-\delta))g_0 \quad \forall\delta > 0 \\
&\overset{\delta\to 0}{\Longrightarrow} \quad g_0 = (E(\lambda_0) - E(\lambda_0-\delta))g_0 \\
&\underset{g_0\neq 0}{\Longrightarrow} \quad P \neq 0
\end{aligned}$$

□

LEMMA 10.5

Sei $A : D(A) \to H$ hermitesch.

a) Ist λ Eigenwert von $A \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

b) Sind λ_1, λ_2 Eigenwerte von A, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, und φ_1, φ_2 zugehörige Eigenvektoren $\Longrightarrow \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$.

BEWEIS.

a) λ Eigenwert $\Longrightarrow \exists \varphi \neq 0,\ \varphi \in D(A):\ A\varphi = \lambda\varphi,\ \|\varphi\| = 1$

$$\lambda^* = \lambda^* \langle \varphi, \varphi \rangle = \langle \lambda\varphi, \varphi \rangle = \langle A\varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, A\varphi \rangle = \langle \varphi, \lambda\varphi \rangle = \lambda \langle \varphi, \varphi \rangle = \lambda$$

b)

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle &= \langle A\varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, A\varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_2 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \\ \underset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Longrightarrow} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

□

SATZ 10.6

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert, $I := [a, b]$ kompakt.
Sei $0 < m := \dim M(I) < \infty$.
Dann gibt es ein Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset M(I)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$A\varphi_i = \lambda_i \varphi_i,\ a < \lambda_i \leq b \quad \forall i = 1, \ldots, m \quad \textit{und} \quad M(I) = span(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$$

BEWEIS.

(i) Nach 9.3 ii)+iii) ist

$$\begin{aligned} AE(I)f &= \int_a^b \lambda dE(\lambda) f \quad \forall f \in H \\ E(I)Af &= \int_a^b \lambda dE(\lambda) f \quad \forall f \in D(A) \end{aligned}$$

Für $f \in M(I)$:

$$Af = AE(I)f = E(I)Af \in M(I)$$

Sei $\widetilde{A} := A\Big|_{M(I)}$

$$\Longrightarrow \quad \widetilde{A} : \underbrace{M(I)}_{\text{endlichdim.}} \to M(I) \text{ hermitesch}$$

$$\overset{\text{siehe Bew.}}{\underset{\text{von 8.1}}{\Longrightarrow}} \quad \exists \varphi_j \in M(I)\ (j = 1, \ldots, m)\ \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ mit } \widetilde{A}\varphi_j = \lambda_j \varphi_j,\ \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \delta_{jk}$$

$$M(I) = span(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \lambda_i \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = \langle A\varphi_i, \varphi_i \rangle = \left\langle \int_a^b \lambda dE(\lambda)\varphi_i, \varphi_i \right\rangle \underset{6.10}{=} \int_a^b \lambda d\|E(\lambda)\varphi_i\|^2 \leq \\
&\leq b \int_a^b d\|E(\lambda)\varphi_i\|^2 = b\|E(I)\varphi_i\|^2 \leq b\|\varphi_i\|^2 = b
\end{aligned}$$

Analog $\lambda_i \geq a$.

(ii) Angenommen $\exists i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\lambda_i = a$

$$\overset{\text{siehe Bew.}}{\underset{\text{von 10.5}}{\Longrightarrow}} \quad (E(a) - E(a-0))\varphi_i = \varphi_i$$

Andererseits

$$(E(b) - E(a))\varphi_i = \varphi_i$$

$$\Longrightarrow \varphi_i = (E(a) - E(a-0))(E(b) - E(a))\varphi_i = (E(a) - E(a) - E(a-0) + E(a-0))\varphi_i = 0$$

Widerspruch.

$\square$

DEFINITION 10.7

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

*λ_0 heißt **Punkt des wesentlichen Spektrums** $\sigma_e(A)$, wenn für jedes kompakte Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 \in \mathring{I}$ gilt:*

$$\dim M(I) = \infty$$

SATZ 10.8 **Hermann Weyl**

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert.
Dann gilt

$$\lambda_0 \in \sigma_e(A) \iff \exists(\varphi_k) \subset D(A),\ \|\varphi_k\| = 1$$
$$\textit{mit } \varphi_k \xrightarrow{\omega} 0 \quad (k \to \infty) \quad \textit{und} \quad \|A\varphi_k - \lambda_0\varphi_k\| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

*(φ_k) heißt **singuläre Folge** zu A und λ_0.*

BEWEIS.

(a) Es gelte $\lambda_0 \in \sigma_e(A)$

Sei für $n \in \mathbb{N} : I_n := [\lambda_0 - \frac{1}{n}, \lambda_0 + \frac{1}{n}]$
$\overset{\text{Blatt 2}}{\underset{\text{Aufg. 2}}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ ONS $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \varphi_n \in M(I_n) \subset D(A)$
$\Longrightarrow \varphi_n \xrightarrow{\omega} 0$

$$\begin{aligned} \|A\varphi_n - \lambda_0\varphi_n\|^2 &= \int\limits_{\lambda_0-\frac{1}{n}}^{\lambda_0+\frac{1}{n}} (\lambda - \lambda_0)^2 d\|E(\lambda)\varphi_n\|^2 \le \left(\frac{1}{n}\right)^2 \|E(I_n)\varphi_n\|^2 \le \\ &\le \left(\frac{1}{n}\right)^2 \underbrace{\|\varphi_n\|^2}_{=1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

(b) Es gelte: $(\varphi_i) \subset D(A),\ \|\varphi_i\| = 1,\ \varphi_i \xrightarrow{\omega} 0,\ (A - \lambda_0)\varphi_i \xrightarrow{s} 0$

Angenommen es existiert $I = [a, b]$ mit $\lambda_0 \in \overset{\circ}{I}$ und $\dim M(I) < \infty$
$\exists \varepsilon > 0 :\ I_0 := [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon] \subset I$
$\Longrightarrow \dim M(I_0) \le \dim M(I) < \infty$

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda_0)\varphi_i\|^2 &= \|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0) dE(\lambda)\varphi_i\|^2 \overset{6.10}{\underset{6.14}{=}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 d\|E(\lambda)\varphi\|^2 \ge \\ &\ge \int\limits_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 d\|E(\lambda)\varphi_i\|^2 + \int\limits_{\lambda_0+\varepsilon}^{\infty} (\lambda - \lambda_o)^2 d\|E(\lambda)\varphi_i\|^2 \ge \\ &\ge \varepsilon^2(\|E(\lambda_0 - \varepsilon)\varphi_i\|^2 + \underbrace{\|\varphi_i\|^2}_{=1} - \langle E(\lambda_0 + \varepsilon)\varphi_i, \varphi_i\rangle) = \varepsilon^2(1 - \langle E(I_0)\varphi_i, \varphi_i\rangle) \end{aligned}$$

Wegen $\dim M(I_0) < \infty$ ist $E(I_0)$ endlichdimensional, also kompakt

$$\begin{aligned}
\underset{\varphi_i \xrightarrow{\omega} 0}{\Longrightarrow} \quad & E(I_0)\varphi_i \xrightarrow{s} 0 \\
\Longrightarrow \quad & \langle E(I_0)\varphi_i, \varphi_i\rangle \longrightarrow 0 \quad (i \to \infty) \\
\Longrightarrow \quad & \exists i_0 \in \mathbb{N} : \ \|E(I_0)\varphi_i\|^2 \leq \frac{1}{2} \quad \forall i \geq i_0 \\
\Longrightarrow \quad & \|(A - \lambda_0)\varphi_i\|^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{2} \quad \forall i \geq i_0 \quad \text{Widerspruch}
\end{aligned}$$

□

DEFINITION 10.9

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert mit zugehöriger Spektralschar E.
Definiere:

$$\begin{aligned}
+\infty \in \sigma_e(A) \quad &:\Longleftrightarrow \quad dim((I - E(n))H) = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
-\infty \in \sigma_e(A) \quad &:\Longleftrightarrow \quad dim((E(-n)H) = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

DEFINITION 10.10

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert.
Dann heißt

$$\sigma_d(A) := \sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$$

das ***diskrete Spektrum*** *von A.*

SATZ 10.11

Sei $A : D(A) \to H$selbstadjungiert. Sei $\lambda_0 \in \sigma_d(A)$.
Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ mit

$$[\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0] \cap \sigma(A) = \{\lambda_0\}$$

und

$$1 \leq \dim M([\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0]) = \dim([E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0)]H) < \infty \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

d.h. λ_0 ist Eigenwert von A.

BEWEIS.
$\lambda_0 \in \sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$
$\overset{10.2}{\Longrightarrow} \exists a < \lambda_0 < b :$

$$0 < \dim M([a,b]) < \infty$$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} :$

$$I_n := [\lambda_0 - \frac{1}{n}, \lambda_0 + \frac{1}{n}] \subset [a,b] \quad \forall n \geq n_0$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Sei } d_n := \dim M(I_n) & \Longrightarrow & 1 \leq d_n < \infty \\ M(I_n) \supset M(I_{n+1}) & \Longrightarrow & d_n \geq d_{n+1} \geq 1 \\ & \Longrightarrow & \exists d \in \mathbb{R} : d_n \ \rightarrow \ d \\ & \overset{d_n \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow} & \exists n_1 \geq n_0 : \quad d_n = d_{n_1} = d \quad \forall n \geq n_1 \end{array}$$

Wegen $M(I_n) \subset M(I_{n_1})$

$$\overset{\text{endlichdim.}}{\Longrightarrow} M(I_n) = M(I_{n_1}) \quad \forall n \geq n_1 \tag{10.4}$$

Wähle $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{n_1},\ I_\varepsilon := [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon],\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

Zeige: $M(I_\varepsilon) = (E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))H \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$
Sei $f \in M(I_\varepsilon)$

$$\begin{array}{rl} \Longrightarrow & f \in M(I_{n_1}) = M(I_n) \quad \forall n \geq n_1 \\ \Longrightarrow & f = E(\lambda_0 + \frac{1}{n})f - E(\lambda_0 - \frac{1}{n})f \ \longrightarrow \ (E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))f \quad (n \to \infty) \\ \Longrightarrow & f \in (E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))H \end{array}$$

Sei $f \in \underbrace{(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))}_{Projektor} H$

$$\begin{array}{rl} \multicolumn{2}{l}{(E(\lambda_0 + \varepsilon) - E(\lambda_0 - \varepsilon))(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))f =} \\ = & (E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - \varepsilon) - E(\lambda_0 - 0) + E(\lambda_0 - \varepsilon))f = \\ = & (E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))f = \\ = & f \\ \Longrightarrow & f \in M(I_\varepsilon) \end{array}$$

Wäre $\lambda \in I_0 \cap \sigma(A),\ \lambda \neq \lambda_0$

$$\Longrightarrow \exists \delta > 0 : \ I_\delta := [\lambda - \delta, \lambda + \delta] \subset I_{n_1} \quad \text{und} \quad \lambda_0 \notin I_\delta$$

Nach 10.2 wäre

$$\dim M(I_\delta) > 0$$

Wähle $\varepsilon > 0$ mit

$$\underbrace{[\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]}_{=:I_\varepsilon} \cap [\lambda - \delta, \lambda + \delta] = \emptyset$$

Zeige: $M(I_\varepsilon) \perp M(I_\delta)$

O.E. $\lambda_0 + \varepsilon < \lambda - \delta$.
Seien $f \in M(I_\varepsilon),\ g \in M(I_\delta)$

$$\Longrightarrow \langle f, g\rangle = \langle E(I_\varepsilon)f, E(I_\delta)g\rangle = \langle f, E(I_\varepsilon)E(I_\delta)g\rangle = 0$$

denn

$$\begin{aligned} E(I_\varepsilon)E(I_\delta) &= (E(\lambda_0+\varepsilon) - E(\lambda_0-\varepsilon))(E(\lambda+\delta) - (E(\lambda-\delta)) = \\ &= E(\lambda_0+\varepsilon) - E(\lambda_0+\varepsilon) - E(\lambda_0-\varepsilon) + (E(\lambda_0-\varepsilon) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad M(I_\varepsilon) \oplus M(I_\delta) \subset M(I_{n_1}) \\ &\Longrightarrow \quad \underbrace{\dim M(I_\varepsilon)}_{\underset{(10.4)}{=} \dim M(I_{n_1})} + \underbrace{\dim M(I_\delta)}_{>0} \leq \dim M(I_{n_1}) \\ &\Longrightarrow \quad \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

□

SATZ 10.12

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert. Sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $\sigma(A)$.
Dann gilt:

$$\lambda_0 \in \sigma_e(A)$$

BEWEIS.
$\exists (\lambda_n) \subset \sigma(A),\ \lambda_n \to \lambda_0,\ \lambda_n \neq \lambda_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\overset{\sigma(A)\text{abgschlossen}}{\Longrightarrow} \lambda_0 \in \sigma(A)$$

und nach 10.11:

$$\lambda_0 \notin \sigma_d(A) \implies \lambda_0 \in \sigma_e(A)$$

□

SATZ 10.13

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert.
Dann gilt:

$$\{\varphi \in D(A) :\ A\varphi = \lambda_0\varphi\} = (E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))H$$

BEWEIS.
wurde in Beweis von 10.4 gezeigt □

SATZ 10.14

Sei $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert mit zugehöriger Spektralschar E. Sei $\lambda_0 \in \mathbb{R} \cap \varrho(A)$. Dann gibt es $a < \lambda_0 < b$ mit

$$[a,b] \subset \varrho(A) \quad \textit{und} \quad E(\lambda) = E(a) \quad \forall \lambda \in [a,b]$$

BEWEIS.
Nach 3.8 ist $\varrho(A)$ offen

$$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 :]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[\subset \varrho(A)$$

Sei $a := \lambda_0 - \frac{\varepsilon}{2},\ b := \lambda_0 + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Longrightarrow [a,b] \subset \varrho(A)$$

Ist $\lambda \in [a,b]$

$$\overset{10.2}{\Longrightarrow} \exists \alpha < \lambda < \beta : \ E(\beta) - E(\alpha) = 0$$

Für $\alpha \leq \mu \leq \beta$ ist

$$0 = (E(\beta) - E(\alpha))E(\mu) = E(\mu) - E(\alpha)$$

$$\Longrightarrow E(\mu) = E(\alpha) = \text{const} \quad \forall \alpha \leq \mu \leq \beta$$

Sei $I_\lambda :=]\alpha, \beta[$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{[a,b]}_{kompakt} \subset \bigcup_{\lambda \in [a,b]} I_\lambda$$

$$\Longrightarrow \quad \exists \lambda_1, ...\lambda_p \in [a,b] : \ [a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{p} I_{\lambda_j}$$

Ist $\mu \in I_{\lambda_j} \cap I_{\lambda_k}$

$$\Longrightarrow E(\lambda_j) = E(\mu) = E(\lambda_k)$$

$]a,b[$ Gebiet. Sei $\lambda_0 \in]a,b[$ fest, $M := \{\lambda \in]a,b[: \ E(\lambda) = E(\lambda_0)\}$

i) $M \neq \emptyset$

ii) M offen:

Ist $\lambda \in M$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \exists j \in \{1, ...p\} : \ \lambda \in I_{\lambda_j} \\ &\Longrightarrow \quad \text{Für } \mu \in I_{\lambda_j} : \ E(\mu) = E(\lambda) = E(\lambda_0) \\ &\Longrightarrow \quad I_{\lambda_j} \subset M \end{aligned}$$

iii) M rel. abgschl.:

Sei $(\lambda_v) \subset M,\ \lambda_v \to \lambda \in]a,b[$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \lambda \in I_{\lambda_j} \quad \text{und} \quad \exists v_0 \in M:\ \lambda_v \in I_{\lambda_j} \quad \forall v \geq v_0 \\
&\Longrightarrow \quad \forall \mu \in I_{\lambda_j}:\ E(\mu) = E(\lambda_{v_0}) = E(\lambda_0) \\
&\Longrightarrow \quad \lambda \in M
\end{aligned}$$

Also $M =]a,b[$

$$E(a)f = \lim_{\substack{\mu \to a \\ \mu > 0}} E(\mu)f = E(\lambda_0)f$$

Weiter ist $b \in [a,b] \subset \bigcup\limits_{j=1}^{P} I_{\lambda_j}$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \exists j_0:\ b \in I_{\lambda_{j_0}} \\
&\Longrightarrow \quad \exists \delta > 0:\ b - \delta \in I_{\lambda_{j_0}} \quad \text{und} \quad E(b) = E(b-\delta) = E(\lambda_0)
\end{aligned}$$

□

SATZ 10.15

Sei $A : H \to H$ beschränkt und hermitesch.
Dann ist A selbstadjungiert mit zugehöriger Spektralschar E. Für $\gamma > \|A\|$ gilt dann

$$E(\lambda) = \begin{cases} I & \textit{für } \lambda \geq \gamma \\ 0 & \textit{für } \lambda \leq -\gamma \end{cases}$$

Insbesondere ist

$$A = \int_{-\gamma}^{\gamma} \lambda dE(\lambda)$$

BEWEIS.

1. A selbstadjungiert klar

2. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| \geq \gamma > \|A\|$

$$\Longrightarrow \quad \|(A-\lambda)f\| \geq |\lambda|\,\|f\| - \|Af\| \geq \underbrace{(|\lambda| - \|A\|)}_{=:d>0}\|f\| \quad \forall f \in H$$

$$\overset{\text{Toeplitz}}{\Longrightarrow} \quad \lambda \in \varrho(A)$$

3. Zeige: Ist $|\lambda| \geq \gamma \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \; E(\lambda+\varepsilon) = E(\lambda-\varepsilon)$
   Dann ist

$$E(\mu) = E(\mu)E(\lambda+\varepsilon) = E(\mu)E(\lambda-\varepsilon) = E(\lambda-\varepsilon) \quad \forall \lambda-\varepsilon \leq \mu \leq \lambda+\varepsilon$$

   Angenommen $\forall \varepsilon > 0$ ist $E(\lambda+\varepsilon) - E(\lambda-\varepsilon) \neq 0$
   Sei $I_\varepsilon := [\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \dim M(I_\varepsilon) > 0 \\ &\overset{10.2}{\Longrightarrow} \quad \lambda \in \sigma(A) \\ &\Longrightarrow \quad \text{Widerspruch zu (ii)} \end{aligned}$$

4. Zeige: $E(\lambda) = E(\gamma) \quad \forall \lambda \geq \gamma$
   Sei $\Gamma := \{\lambda > \gamma : \; E(\lambda) = E(\gamma)\} \subset \underbrace{\{\lambda \in \mathbb{R} : \; \lambda > \gamma\}}_{\text{Gebiet}}$

   (a) Nach (iii) $\exists \varepsilon > 0 : \; E(\lambda) = E(\gamma)$ für $\gamma - \varepsilon \leq \lambda \leq \gamma + \varepsilon$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \lambda := \gamma + \frac{\varepsilon}{2} \in \Gamma \\ &\Longrightarrow \quad \Gamma \neq \emptyset \end{aligned}$$

   (b) Γ offen:

   Sei $\lambda_0 \in \Gamma$

$$\overset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0 \quad \text{mit} \quad E(\lambda) = E(\lambda_0) = E(\gamma) \quad \forall |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

   (c) Γ rel. abgeschlossen:

   Sei $(\lambda_n) \subset \Gamma, \; \lambda_n \to \lambda_0 \in \mathbb{R}, \; \lambda_0 > \gamma$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \quad \exists \varepsilon > 0 : \; E(\lambda) = E(\lambda_0) \quad \forall |\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon \\ &\Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; |\lambda_n - \lambda_0| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \\ &\Longrightarrow \quad E(\lambda_0) = E(\lambda_{n_0}) = E(\gamma) \\ &\Longrightarrow \quad \lambda_0 \in \Gamma \end{aligned}$$

   Nach a) - c) folgt

$$\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{R} : \; \lambda > \gamma\}$$

5. Analog $E(\lambda) = E(-\gamma) \quad \forall \lambda < -\gamma$

6.

$$\begin{aligned} E(\gamma)f &= E(\lambda)f \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} f \quad (\lambda > \gamma) \\ \Longrightarrow E(\gamma)f &= f \quad \forall f \in H \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} E(-\gamma)f &= E(\lambda)f \overset{\lambda\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Longrightarrow E(-\gamma) &= 0 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} Af &\overset{9.3}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda)f \overset{\text{vi,vii}}{=} \underbrace{\int\limits_{-\gamma}^{+\gamma} \lambda dE(\lambda)f}_{\in B(H)} \\ \Longrightarrow A &= \int\limits_{-\gamma}^{+\gamma} \lambda dE(\lambda) \end{aligned}$$

□

SATZ 10.16

Sei $\dim H = \infty,\ A : H \to H$ *beschränkt und hermitesch.*
Dann gilt:

$$A \text{ kompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma_e(A) = \{0\}$$

BEWEIS.

1. Es gelte: A kompakt

   Sei $\lambda_0 \in \sigma_e(A)$

$$\begin{aligned} &\underset{\text{wegen 10.8}}{\Longrightarrow} && \exists(\varphi_n) \subset H,\ \|\varphi_n\| = 1,\ \varphi_n \xrightarrow{w} 0,\ (A - \lambda_0)\varphi_n \xrightarrow{s} 0 \\ &\Longrightarrow && \lambda_0\varphi_n = \underbrace{\lambda_0\varphi_n - A\varphi_n}_{\to 0} + \underbrace{A\varphi_n}_{\to 0} \to 0, \quad \text{denn: } A\varphi_n \xrightarrow{s} 0 \text{ da } A \text{ kompakt} \\ &\Longrightarrow && |\lambda_0| = \|\lambda_n\varphi_n\| \to 0 \\ &\Longrightarrow && \lambda_0 = 0 \end{aligned}$$

   Nach 10.15 gilt $\pm\infty \notin \sigma_e(A)$
   Ist $A = 0$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow && \dim[(E(0) - E(0-0))H] \overset{10.13}{=} \dim H = \infty \\ &\overset{10.11}{\Longrightarrow} && 0 \notin \sigma_d(A) \\ &\Longrightarrow && 0 \in \sigma_e(A) \end{aligned}$$

   Ist $A \neq 0$, so ist nach Funkana I, Satz 12.4 (Spektralsatz)

(a) entweder $Af = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle \Phi_k, f \rangle \Phi_k$

$$\Longrightarrow \dim R(A) < \infty$$

und wegen $N(A) = N(A^*) \overset{\text{Funkana I 5.5}}{=} R(A)^\perp$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow && \dim N(A) = \infty \\ &\overset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow} && 0 \in \sigma_e(A) \end{aligned}$$

(b) oder es gibt ONS $(\varphi_j)_{j \in N}$ von Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_j \neq 0,\ \lambda_j \to 0$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow && \varphi_j \xrightarrow{w} 0 \\ &\overset{A\text{ kompakt}}{\Longrightarrow} && A\varphi_j \xrightarrow{s} 0 \\ &\overset{10.8}{\Longrightarrow} && 0 \in \sigma_e(A) \end{aligned}$$

Also insgesamt

$$\sigma_e(A) = \{0\}$$

2. Es gelte $\sigma_e(A) = \{0\}$

Sei $N > \|A\|$

$$\Longrightarrow \left(\underbrace{\left[-N, -\frac{1}{n}\right]}_{=:I_n^-} \cup \underbrace{\left[\frac{1}{n}; N\right]}_{=:I_n^+} \right) \cap \sigma(A) \subset \sigma_d(A)$$

Zeige: $(I_n^+ \cup I_n^-) \cap \sigma(A)$ enthält nur endlich viele Elemente.

Wären $\lambda_k \in (I_n^+ \cup I_n^-) \cap \sigma(A)$ p.w. verschieden

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow && (\lambda_k) \text{ beschränkt} \\ &\Longrightarrow && \exists \lambda_{k_v} \to \lambda^*,\ \lambda_{k_v} \neq \lambda^* \quad \forall v \in \mathbb{N} \\ &\overset{I_n^+ \cap I_n^- \text{ abgeschl.}}{\Longrightarrow} && \lambda^* \in I_n^+ \cup I_n^- \\ &\overset{10.12}{\Longrightarrow} && \lambda^* \in (I_n^+ \cup I_n^-) \cap \sigma(A) \\ &\Longrightarrow && \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow I_n^+ \cap \sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_m\}, \quad \lambda_1 < ... < \lambda_m$$

Zeige: $E(\lambda_i) = E(\lambda_{i+1} - 0)$

$]\lambda_i; \lambda_{i+1}[\subset \sigma(A)$

$$\begin{aligned} &\overset{10.14}{\Longrightarrow} && E(\lambda) = \text{const} \quad \forall \lambda \in]\lambda_i; \lambda_{i+1}[\\ &\Longrightarrow && E(\lambda) = E(\lambda_i) \quad \forall \lambda \in]\lambda_i; \lambda_{i+1}[\quad \text{da } \lim_{\substack{\lambda \to \lambda_i \\ \lambda > \lambda_i}} E(\lambda) f = E(\lambda_i) f \\ &\Longrightarrow && E(\lambda_{i+1} - 0) f = \lim_{\substack{\lambda \to \lambda_{i+1} \\ \lambda < \lambda_{i+1}}} E(\lambda) f = E(\lambda_i) f \quad \forall f \in H \end{aligned}$$

Weiter $E(N) = E(\lambda_m)$ Rechtsstetigkeit, $E\left(\frac{1}{n}\right) = E(\lambda_1 - 0)$

$$\Longrightarrow E(N) - E\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{m-1}(E(\lambda_{i+1}) - E(\lambda_i)) + E(\lambda_1) - E\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{m}(E(\lambda_i) - E(\lambda_i - 0))$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad M(I_n^+) \subset \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(E(\lambda_i) - E(\lambda_i - 0))H}_{\text{endlich dim nach 10.11}} \\ &\Longrightarrow \quad \dim M(I_n^+) < \infty \end{aligned}$$

Analog $\dim M(I_n^-) < \infty$

Nun ist $D(A) = H$

$$\begin{aligned} AE(I_n^+)f &\overset{9.3}{=} \int_{\frac{1}{n}}^{N} \lambda dE(\lambda)f = E(I_n^+)Af \quad \forall f \in H \\ AE(I_n^-)f &= \underbrace{\int_{-N}^{-\frac{1}{n}} \lambda dE(\lambda)f}_{\subset B(H)} = E(I_n^-)Af \quad \forall f \in H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{10.15}{\Longrightarrow} \|Af - (E(I_n^+) + E(I_n^-))Af\|^2 &= \left\| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \lambda dE(\lambda)f \right\|^2 = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2 \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{n}\right)^2 \|f\|^2 \quad \forall f \in H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Def. Norm in } B(H)}{\Longrightarrow} \quad \Big\| A - \underbrace{(E(I_n^+)) + E(I_n^-))Af}_{\text{endlichdim}} \Big\|_{B(H)} \leq \frac{1}{n} \to 0 \\ &\overset{\text{Funkana I}}{\Longrightarrow} \quad A \text{ kompakt} \end{aligned}$$

$\square$

DEFINITION 10.17

Seien $A : D(A) \to H,\ B : D(B) \to H$ (hermitesche) Operatoren mit $D(A) \subset D(B)$. Dann heißt B A-kompakt, wenn für jede Folge $(u_n) \subset D(A)$ mit

$$\|u_n\| + \|Au_n\| \leq c < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt: Es existiert Teilfolge $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ mit $(Bu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent

SATZ 10.18

Seien A, B hermitesche Operatoren und B sei A-kompakt.
Dann ist B A-beschränkt mit Schranke 0, d.h.

$$\forall a > 0\ \exists b > 0 \text{ mit } \|Bu\| \leq a\|Au\| + b\|u\| \quad \forall u \in D(A) \tag{10.5}$$

BEWEIS.
Angenommen Behauptung ist falsch

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \exists a > 0 :\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists u_n \in D(A) \quad \text{mit} \quad \|Bu_n\| > a\|Au_n\| + n\|u_n\| \\
&\Longrightarrow \quad 1 > a\frac{\|Au_n\|}{\|Bu_n\|} + n\frac{\|u_n\|}{\|Bu_n\|} = a\|Av_n\| + n\|v_n\| \geq n\|v_n\| \quad \text{mit} \quad v_n := \frac{u_n}{\|Bu_n\|} \\
&\Longrightarrow \quad \|v_n\| \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{und} \quad \|v_n\| + \|Av_n\| \leq 1 + \frac{1}{a} \quad \forall n \in N \\
&\underset{A\text{-kompakt}}{\overset{B \text{ ist}}{\Longrightarrow}} \quad \exists (v_{n_k}) \subset (v_n),\ h \in H :\ \left.\begin{array}{r} Bv_{n_k} \to h \\ v_{n_k} \to 0 \end{array}\right\} \underset{\text{aber abschließbar}}{\overset{B \text{ hermitesch}}{\Longrightarrow}} k = 0
\end{aligned}$$

Aber $\|Bv_{n_k}\| = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow$ Widerspruch □

SATZ 10.19

Sei A selbstadjungiert, B hermitesch mit $D(A) \subset D(B)$. Weiter sei B A-kompakt.
Sei $C := A + B$ mit $D(C) = D(A)$.
Dann ist C selbstadjungiert und

$$\sigma_e(A) = \sigma_e(C)$$

BEWEIS.

a) C selbstadjungiert nach Rellid-Kato (4.2)

b) Sei $\lambda_0 \in \sigma_e(A)$

$$\begin{aligned}
&\overset{10.8}{\Longrightarrow} \quad \exists (\varphi_n) \subset D(A),\ \|\varphi_n\| = 1,\ \varphi_n \overset{w}{\to} 0,\ (A - \lambda_0)\varphi_n \overset{s}{\to} 0 \\
&\Longrightarrow \quad \|A\varphi_n\| \leq \underbrace{\|\lambda_0\varphi_n\|}_{\subset|\lambda_0|} + \|(A - \lambda_0)\varphi\| \ \to \ |\lambda_0| \\
&\Longrightarrow \quad \exists K > 0 :\ \|A\varphi_n\| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
&\underset{A\text{-kompakt}}{\overset{B \text{ ist}}{\Longrightarrow}} \quad \exists (\varphi_{n_k}) :\ B\varphi_{n_k} \to h \in H
\end{aligned}$$

Für $f \in D(B)$ ist

$$\langle f, h \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle f, B\varphi_{n_k} \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Bf, \varphi_{n_k} \rangle = 0$$

$\overset{\text{D(B) dicht}}{\Longrightarrow} h = 0$

$$\|(A+B)\varphi_{n_k} - \lambda_0\varphi_{n_k}\| \leq \|A\varphi_{n_k} - \lambda_0\varphi_{n_k}\| + \|B\varphi_{n_k}\| \;\to\; 0$$

Setze $\psi_k := \varphi_{n_k}$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad (\psi_k) \text{ singuläre Folge zu } (A+B) \text{ und } \lambda_0 \\ &\overset{10.8}{\Longrightarrow} \quad \lambda_0 \in \sigma(A+B) \end{aligned}$$

c) Sei $\lambda_0 \in \sigma_e(A+B)$
Sei $(\psi_n) \subset D(C) = D(A)$ mit $\|\psi_n\| = 1,\ \psi_n \xrightarrow{w} 0,\ \|(A+B)\psi_n - \lambda_0\psi_n\| \;\to\; 0$
Nach 10.18 ist B A-beschränkt mit Schranke 0, dh. zu $a = \frac{1}{2}$ $\exists b > 0$ mit

$$\|Bf\| \leq \frac{1}{2}\|Af\| + b\|f\| \quad \forall f \in D(A)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \|B(\Psi_n)\| \;&\leq\; \frac{1}{2}\|A\Psi_n\| + b\|\Psi_n\| \leq \\ &\leq\; \frac{1}{2}\|(A+B)\Psi_n - \lambda_0\Psi_n\| + \frac{1}{2}\|B\Psi_n\| + (b + \frac{1}{2}|\lambda_0|)\underbrace{\|\Psi_n\|}_{=1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\|B(\Psi_n)\| \leq \frac{1}{2}\|(A+B)\Psi_n - \lambda_0\Psi_n\| + b + \frac{1}{2}|\lambda_0| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\underset{\text{Kompaktheit}}{\overset{\text{schwache}}{\Longrightarrow}} \quad \exists \text{ Teilfolge } (\Psi_{n_k}),\ h \in H:\ B\Psi_{n_k} \xrightarrow{w} h \end{aligned}$$

Für $f \in D(B)$ ist

$$\langle f, h\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle f, B\Psi_{n_k}\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle Bf, \Psi_{n_k}\rangle = 0$$

$\overset{D(B)\text{ dicht}}{\Longrightarrow} h = 0$

$f \in H:$

$$\langle A\Psi_{n_k}, f\rangle = \langle((A+B) - \lambda_0)\Psi_{n_k}, f\rangle + \lambda_0\langle\Psi_{n_k}, f\rangle - \langle B\Psi_{n_k}, f\rangle \;\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}\; 0$$

dass heißt

$$A\Psi_{n_k} \xrightarrow{w} 0 \;\Longrightarrow\; \exists M > 0:\ \|A\Psi_{n_k}\| \leq M$$

$$\begin{aligned} &\underset{A\text{-kompakt}}{\overset{B\text{ ist}}{\Longrightarrow}} \quad \text{OE.} B\Psi_{n_k} \;\xrightarrow{s}\; 0 \quad \text{(sonst wähle weiter Teilfolge)} \\ &\Longrightarrow \quad \|A\Psi_{n_k} - \lambda_0\Psi_{n_k}\| \leq \underbrace{\|(A+B)\Psi_{n_k} - \lambda_0\Psi_{n_k}\|}_{\to 0} + \underbrace{\|B\Psi_{n_k}\|}_{\to 0} \to 0 \\ &\Longrightarrow \quad \varphi_k := \Psi_{n_k} \quad \text{ist singuläre Folge zu } A \text{ und } \lambda_0 \end{aligned}$$

□

11. Funktionen eines selbstadjungierten Operators

Sei im Folgenden stets H separabler, komplexer Hilbertraum und $A : D(A) \to H$ selbstadjungiert mit Spektralschar E, d.h.

$$Af = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)f \quad \forall f \in D(A)$$

LEMMA 11.1

Sei u:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig,* $f \in H$.

Dann existiert $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)dE(\lambda)f \in H$ *genau dann, wenn* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda)|^2 d\|E(\lambda f)\|^2$ *existiert.*

BEWEIS.

analog zu Lemma 9.1 □

SATZ 11.2

Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig.*

Setze $D(u(A)) := \left\{ f \in H : \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 existiert \right\}$

Dann ist $D(u(A))$ *dichter Untervektorraum von* H *und der Operator*

$$u(A)f := \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)dE(\lambda)f, \quad f \in D(u(A))$$

ist selbstadjungiert.

BEWEIS.

Analog zu Satz 9.2. □

BEMERKUNG.
Seien $f, g \in D(u(A)),\ \mu \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)E(\mu)f\|^2 = \int_{-\infty}^{\mu} |u(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 < \int_{-\infty}^{+\infty} \|u(\lambda)\|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 < \lambda$$

$\Longrightarrow E(\lambda)f \in D(u(A))$

$$\begin{aligned}
\langle g, E(\mu)u(A)f\rangle &= \langle E(\mu)g, u(A)f\rangle = \left\langle E(\mu)g, \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda)dE(\lambda)f\right\rangle \overset{6.10}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda)d\langle E(\mu)g, E(\lambda)f\rangle = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda)d\langle g, E(\mu)E(\lambda)f\rangle = \int_{-\infty}^{\mu} u(\lambda)d\langle g, E(\lambda)f\rangle = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda)d\langle E(\lambda)g, E(\mu)f\rangle \overset{u(\lambda)\in\mathbb{R}}{=} \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda)dE(\lambda)g, E(\mu)f\right\rangle = \\
&= \langle u(A)g, E(\mu)f\rangle = \langle g, u(A)E(\mu)f\rangle
\end{aligned}$$

$$\overset{D(u(A))\text{dicht}}{\Longrightarrow} u(A)E(\mu)f = E(\mu)u(A)f \quad \forall f \in D(u(A)) \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

SATZ 11.3

Sei $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, $w = u + iv$. Sei

$$D(w(A)) := D(w(A)) \cap D(v(A))$$

Dann gilt $D(w(A)) = D(|w|(A))$ und $D(w(A))$ ist dicht in H.
Für $f \in D(w(A))$ sei

$$w(A)f := u(A)f + iv(A)f = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)dE(\lambda)f$$

Weiter gilt für $f \in H,\ g \in D(w(A))$:

$$\langle f, w(A)g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)d\langle E(\lambda)f, g\rangle \quad \textit{und} \quad \|w(A)g\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |w(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)g\|^2$$

BEWEIS.

1. Wegen $|w|^2 = u^2 + v^2,\ |w| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig gilt $D(w(A)) = D(|w|(A))$ dicht in H nach 11.2 Weiter nach 11.2 existiert

$$\begin{aligned} u(A)f + iv(A)f &= \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \left(\int_a^b u(\lambda)dE(\lambda)f + i\int_a^b v(\lambda)dE(\lambda)f \right) = \\ &= \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \left(\int_a^b \underbrace{(u(\lambda)+iv(\lambda))}_{=w(\lambda)} dE(\lambda)f \right) \end{aligned}$$

2. Sei $f \in H,\ g \in D(w(A)),\ a < b$

$$\left\langle f, \int_a^b w(\lambda)dE(\lambda)g \right\rangle = \int_a^b w(\lambda)d\langle E(\lambda)f, g\rangle$$

$$\underset{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}{\Longrightarrow} \langle f, w(A)g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\lambda)d\langle E(\lambda)f, g\rangle \quad \text{existiert}$$

$$\left\| \int_a^b w(\lambda)dE(\lambda)g \right\|^2 \underset{6.10}{=} \int_a^b |w(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)g\|^2$$

$$\underset{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}{\Longrightarrow} \|w(A)g\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |w(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)g\|^2$$

$\square$

DEFINITION 11.4

Seien $\Gamma_i : D(\Gamma_i) \to H$ lineare Operatoren

1. *Für f* $\in D(\Gamma_1 + \Gamma_2) := D(\Gamma_1) \cap D(\Gamma_2)$ *sei*

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2)(f) := \Gamma_1 f + \Gamma_2 f$$

2. *Für f* $\in D(\Gamma_1\Gamma_2) := \{g \in D(\Gamma_2) :\ \Gamma_2 g \in D(\Gamma_1)\}$ *sei*

$$(\Gamma_1\Gamma_2)g := \Gamma_1(\Gamma_2(g))$$

SATZ 11.5

Seien $w_1, w_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:

i) $w_1(A) + w_2(A) \subset (w_1 + w_2)(A)$

ii) $D(w_1(A) + w_2(A)) = D((w_1 + w_2)(A)) \cap D(w_i(A)) \quad (i = 1, 2)$

iii) $w_1(A) + w_2(A) = (w_1 + w_2)(A)$ *genau dann,*
wenn $D((w_1 + w_2)(A)) \subset D(w_1(A))$ *oder* $D((w_1 + w_2)(A)) \subset D(w_2(A))$

iv) $w_1(A)w_2(A) \subset (w_1 w_2)(A)$

v) $D(w_1(A)w_2(A)) = D(w_2(A)) \cap D((w_1 w_2)(A))$

vi) $w_1(A)w_2(A) = (w_1 w_2)(A)$ *genau dann, wenn* $D((w_1 w_2)(A)) \subset D(w_2(A))$

BEWEIS.

1. Sei $f \in D(w_1(A)) \cap D(w_2(A))$

$$\Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} |w_i(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 < \infty \quad (i = 1, 2)$$

$$|w_1(\lambda) + w_2(\lambda)|^2 \underset{\text{Young}}{\leq} |w_1(\lambda)|^2 + |w_2(\lambda)|^2 + 2|w_1(\lambda)||w_2(\lambda)| \leq 2|w_1(\lambda)|^2 + 2|w_2(\lambda)|^2$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda) + w_2(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 < \infty \\ &\Longrightarrow f \in D((w_1 + w_2)(A)) \end{aligned}$$

Für $a < b$:

$$\int\limits_a^b |w_1(\lambda) + w_2(\lambda)| dE(\lambda)f = \int\limits_a^b w_1(\lambda) dE(\lambda)f + \int\limits_a^b w_2(\lambda) dE(\lambda)f$$

$$\underset{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}}{\Longrightarrow} (w_1 + w_2)(A)f = w_1(A)f + w_2(A)f \quad \Longrightarrow \quad i)$$

2. Sei $f \in D((w_1+w_2)(A)) \cap D(w_1(A))$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda)+w_2(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 < \infty \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 < \infty$$

$$|w_2(\lambda)| \le |w_1(\lambda)+w_2(\lambda)| + |w_1(\lambda)|$$

$$\begin{aligned} \underset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} &\quad |w_2(\lambda)|^2 \le 2|w_1(\lambda)+w_2(\lambda)|^2 + 2|w_1(\lambda)|^2 \\ \Longrightarrow &\quad f \in D(w_2(A)) \\ \Longrightarrow &\quad f \in D(w_1(A)+w_2(A)) \\ \Longrightarrow &\quad ii) \text{ und } iii) \end{aligned}$$

3. Nach der Bemerkung gilt (betrachte Real- und Imaginärteil)

$$E(\lambda)w_2(A)f = w_2(A)E(\lambda)f \quad \forall f \in D(w_2(A))$$

Sei nun

$$f \in D(w_1(A)w_2(A)) \quad \Big(\Longrightarrow f \in D(w_2(A))\Big)$$

$$\begin{aligned} \|E(\lambda)w_2(A)f\|^2 &= \|w_2(A)E(\lambda)f\|^2 \overset{11.3}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |w_2(\mu)^2 d\|E(\mu)E(\lambda)f\|^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\lambda} |w_2(\mu)|^2 d\|E(\mu)f\|^2 + \int_{\lambda}^{\infty} |w_2(\mu)|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 \end{aligned}$$

Da $w_2(D)f \in D(w_1(A))$, gilt

$$\infty > \int_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)w_2(A)f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda)|^2 dG(\lambda) \tag{11.1}$$

mit

$$G(\lambda) := \|E(\lambda)w_2(A)f\|^2 = \int_{-\infty}^{\lambda} |w_2(\mu)|^2 d\|E(\mu)f\|^2$$

Sei nun $\varrho \in C_0^0(\mathbb{R}),\ 0 \le \varrho \le 1,\ \varrho(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |\lambda| \le 1 \\ 0 & \text{für} \quad |\lambda| \ge 2 \end{cases}$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\varrho_n(\lambda) := \varrho(\frac{\lambda}{n})$

$$\Longrightarrow \varrho_n(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |\lambda| \le n \\ 0 & \text{für} \quad |\lambda| \ge 2n \end{cases}$$

Setze

$$G_n(\lambda) := \int_{-\infty}^{\lambda} \varrho_n(\mu)|w_2(\mu)|^2 d\|E(\mu)f\|^2$$

4. Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ mit $-m < a < b < m,\ h : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

   Zeige: $\int\limits_a^b h(\lambda) dG_m(\lambda) = \int\limits_a^b h(\lambda) dG(\lambda)$

   Es genügt dies für Approximationssummen zu zeigen
   Sei also $a = \lambda_1 < \ldots < \lambda_{p+1} = b$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p} h(\lambda_i)[G_m(\lambda_{i+1}) - G_m(\lambda_i)] &= \sum_{i=1}^{p} h(\lambda_i) \int\limits_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \underbrace{\varrho_m(\mu)}_{=1} |w_2(\mu)|^2 d\|E(\mu)f\|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{p} h(\lambda_i)[G(\lambda_{i+1}) - G(\lambda_i)]\end{aligned}$$

5. Sei $m > 2n,\ n \in \mathbb{N}$ beliebig

$$\begin{aligned}L(n) \quad &:= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varrho_n(\lambda)|w_1(\lambda)|^2 dG(\lambda) = \int\limits_{-2n}^{+2n} \varrho_n(\lambda)|w_1(\lambda)|^2 dG(\lambda) = \\ &\overset{4.}{=} \int\limits_{-2n}^{+2n} \varrho_n(\lambda)|w_1(\lambda)|^2 dG_m(\lambda) \overset{8.4}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varrho_n(\lambda)|w_1(\lambda)|^2\, \varrho_m(\lambda)|w_2(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 = \\ &\underset{\varrho_n(\lambda)\varrho_n(\lambda)}{\overset{\varrho_n(\lambda)=}{=}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varrho_n(\lambda)|w_1(\lambda)w_2(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 = \\ &=: \quad R(n)\end{aligned} \tag{11.2}$$

   Es ist

$$\varrho_n(\lambda)|w_1(\lambda)|^2 \leq |w_1(\lambda)|^2$$

   und nach (11.1)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |w_1(\lambda)|^2 dG(\lambda) < \infty$$

   Weiter

$$\varrho_n(\lambda)|w_1(\lambda)|^2 \to |w_1(\lambda)|^2 \quad (n \to \infty) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\underset{\text{Def. } G}{\overset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varrho_n(\lambda)\, |w_1(\lambda)|^2 dG(\lambda) \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |w_1(\lambda)|^2 dG(\lambda)$$

   Es ist $\varrho_n \subseteq \varrho_{n+1}$ (bzw. kann so gewählt werden)

$$\underset{\text{Levi}}{\Longrightarrow} R(n) \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |w_1(\lambda)w_2(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 < \infty,\ \text{d.h. } f \in D((w_1 w_2)(A))$$

6. Sei nun $f \in D((w_1 w_2)(A)) \cap D(w_2(A))$

$$\underset{\text{(bis auf (11.1))}}{\overset{\text{Analog}}{\Longrightarrow}} L(n) = R(n) \tag{11.3}$$

Nach Lebesgue $\exists \lim\limits_{n\to\infty} R(n) < \infty$

$$\begin{aligned} &\underset{\text{Levi}}{\Longrightarrow} \quad \exists \lim_{n\to\infty} L(n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |w_1(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)w_2(A)f\|^2 < \infty \\ &\Longrightarrow \quad f \in D(w_1(A)w_2(A)) \end{aligned}$$

7. Zeige: $E(\lambda)w_2(A)f = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} w_2(\mu)dE(\mu)f \quad \forall f \in D(w_2(A))$

Seien $f, g \in D(w_2(A))$ dicht in H

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \langle g, E(\lambda)w_2(A)f\rangle &= \langle E(\lambda)g, w_2(A)f\rangle \overset{11.3}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_2(\mu)d\langle E(\mu)E(\lambda)g, f\rangle = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\lambda} w_2(\mu)d\langle E(\mu)g, f\rangle \overset{6.10}{=} \left\langle g, \int\limits_{-\infty}^{\lambda} w_2(\mu)dE(\mu)f \right\rangle \end{aligned}$$

8. Zeige: $\int\limits_a^b w_1(\lambda)dE(\lambda)(w_2(A)f) = \int\limits_a^b w_1(\lambda)w_2(\lambda)dE(\lambda)f \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad f \in D(w_2(A))$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.
Sei $c > 0 : \ |w_1(\lambda)| \leq c \quad \forall \lambda \in [a, b]$

$$\Longrightarrow \exists \delta > 0 : \ |w_2(\lambda) - w_2(\lambda')| < \varepsilon \quad \forall \lambda, \lambda' \in [a, b], \ |\lambda - \lambda'| \leq \delta$$

Sei $z : a = \lambda_0 < \cdots < \lambda_{p+1} = b$ mit $\max\limits_{i=1\ldots p} |\lambda_{i+1} - \lambda_i| \leq \delta$

$$\begin{aligned} S_1(z) &:= \sum_{i=1}^{p} w_1(\lambda_i)[E(\lambda_{i+1})w_2(A)f - E(\lambda_i)w_2(A)f] \underset{7.}{=} \sum_{i=1}^{p} w_1(\lambda_i) \int\limits_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} w_2(\mu)dE(\mu)f \\ S_2(z) &:= \sum_{i=1}^{p} w_1(\lambda_i)w_2(\lambda_i)[E(\lambda_{i+1})f - E(\lambda_i)f] = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} w_1(\lambda_i)w_2(\lambda_i)dE(\mu)f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|S_1(z) - S_2(z)\|^2 &\leq 2\sum_{i=1}^{p} \int\limits_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} |\omega_1(\lambda_i)|^2 |\omega_2(\lambda_i) - \omega_2(\mu)|^2 d\|E(\mu)f\|^2 \leq \\ &\leq 2c^2\varepsilon^2(\|E(b)f\|^2 - \|E(a)f\|^2) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Beh.

9. Für $a \to -\infty,\ b \to +\infty$ folgt, falls $f \in D(\omega_1(A)\omega_2(A))$

$$\omega_1(A)\omega_2(A)f = (\omega_1\omega_2)(A)f$$

□

SATZ 11.6

Sei $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$(\omega^n)(A) = \omega(A)^n$$

BEWEIS.

$$\omega(A)^n := \omega(A)\omega(A)^{n-1}$$

$n = 1$**:** klar.

$n \to n+1$**:** Setze $\omega_2(\lambda) := \omega^n(\lambda),\ \omega_1(\lambda) := \omega(\lambda)$.
Sei $f \in D((\omega_1 \cdot \omega_2)(A)) = D(\omega^{n+1}(A))$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega(\lambda)|^{2n+2} d\|E(\lambda)f\|^2 < \infty$$

Zeige $f \in D(\omega_2(A)) = D(\omega^n(A))$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega(\lambda)|^{2n} d\|E(\lambda)f\|^2 \underset{\substack{p=\frac{n}{n+1}\\ p'=n+1}}{\overset{\text{Hölder}}{\leq}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega(\lambda)|^{2(n+1)} d\|E(\lambda)f\|^2\right)^{\frac{n}{n+1}}}_{<\infty} \underbrace{\left(\int_a^b d\|E(\lambda)f\|^2\right)^{\frac{1}{n+1}}}_{\leq \|f\|^2 < \infty}$$

$$\Longrightarrow \quad D(\omega_1 \cdot \omega_2)(A)) \subset D(\omega_2(A))$$

$$\overset{11.5}{\Longrightarrow} \quad \omega_1(A) \cdot \omega_2(A) = (\omega_1 \cdot \omega_2)(A)$$

d.h. $(\omega^{n+1})(A) = \omega(A)(\omega^n)(A) \overset{\text{I.V.}}{=} \omega(A)\omega(A)^n = \omega(A)^{n+1}$

□

SATZ 11.7

Sei $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und $\omega(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Dann existiert $\omega(A)^{-1} : R(\omega(A)) \to D(\omega(A))$ und es gilt

$$\omega(A)^{-1} = \omega^{-1}(A)$$

BEWEIS.
$I(A) = I : H \to H$

$$\begin{aligned} \omega^{-1}(A)\omega(A) &\overset{11.5}{=} (\omega^{-1}\cdot\omega)(A)\Big|_{D(\omega(A))\cap \underbrace{D(1(A))}_{=H}} = I\Big|_{D(\omega(A))} \\ \omega(A)\omega^{-1}(A) &= (\omega\omega^{-1})(A)\Big|_{D(\omega^{-1}(A))} = I\Big|_{D(\omega^{-1}(A))} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow R(\omega(A)) = D(\omega^{-1}(A))$ und der Rest der Behauptung. □

BEISPIEL 11.8
Sei $\langle Af, f\rangle \geq 0 \quad \forall\, f \in D(A)$.

$$\overset{\text{Blatt 9}}{\Longrightarrow} \quad E(\lambda) = 0 \quad \forall\, \lambda < 0$$

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, so folgt

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(\lambda)dE(\lambda)f = f(0)E(0)f.$$

Sei $\omega(\lambda) := \begin{cases} \sqrt{\lambda} & \text{für } \lambda \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Sei $D(B) := D(\omega(A)) = \left\{ f \in H : \int\limits_{0}^{\infty} \lambda d\|E(\lambda)f\|^2 < \infty \right\}$.

$$Bf := \omega(A)f = \int\limits_{0}^{\infty} \sqrt{\lambda}dE(\lambda)f$$

$$\langle Bf, f\rangle \overset{\omega:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}{=} \langle f, BF\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\omega(\lambda)}_{\leq 0} d\|E(\lambda)f\|^2 \geq 0$$

und

$$B^2 = \omega(A)\omega(A) = \omega(A)^2 \overset{11.6}{=} \omega^2(A) \underset{\lambda<0}{\overset{E(\lambda)=0}{=}} A$$

◇

SATZ 11.9
Sei $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, $|\omega(\lambda)| \leq M < \infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Dann ist $\omega(A) \in B(H)$ und

$$\|\omega(A)\|_{B(H)} \leq M$$

BEWEIS.
Für $f \in H$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 \leq M^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\|E(\lambda)f\|^2 = M^2\|f\|^2$$

$\Longrightarrow D(\omega(A)) = H.$
Weiter

$$\|\omega(A)f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 \leq M^2\|f\|^2$$

□

SATZ 11.10

Sei $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\omega(A)^* = \omega^*(A) \quad \textit{und} \quad \omega(A) = [\omega^*(A)]^*$$

Insbesondere ist $\omega(A)$ abgeschlossen.

BEWEIS.

(i) Nach Definition ist

$$D(\omega(A)) = D(\omega^*(A)) =: D$$

(ii) Für $f, g \in D$ ist

$$\langle \omega(A)f, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \int_{-n}^{n} \omega(\lambda) dE(\lambda)f, g \right\rangle \overset{6.11}{=} \lim_{n\to\infty} \left\langle f, \int_{-n}^{n} \omega^*(\lambda) dE(\lambda)g \right\rangle = \langle f, \omega^*(A)g\rangle$$

$$\overset{\text{Def. } \omega(A)^*}{\Longrightarrow} g \in D(\omega(A)^*) \quad \text{und} \quad \omega(A)^*g = \omega^*(A)g, \ d.h. \quad \omega^*(A) \subset \omega(A)^*$$

(iii) Sei $g \in D(\omega(A)^*)$

$$\Longrightarrow \exists\, g^* \in H \text{ mit } \langle \omega(A)f, g\rangle = \langle f, g^*\rangle \quad \forall f \in D$$

Sei $I_n := [-n, n], \ n \in \mathbb{N}, \ d \in D$.

$$\begin{aligned} \omega(A)E(I_n)f &= \omega(A)E(n)f - \omega(A)E(-n)f \overset{\text{Bem.}}{=} E(N)\omega(A)f - E(-n)\omega(A)f = \\ &\overset{11.5,\,7.}{=} \int_{-\infty}^{n} \omega(\lambda) dE(\lambda)f - \int_{-\infty}^{-n} \omega(\lambda) dE(\lambda)f \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \langle \omega(A)E(I_n)f, g\rangle = \left\langle \int_{-n}^{n} \omega(\lambda) dE(\lambda)f, g \right\rangle \overset{6.11}{=} \left\langle f, \int_{-n}^{n} \omega^*(\lambda) dE(\lambda)g \right\rangle$$

Nach der Bemerkung ist $E(I_n)f \in D(f \in D)$.

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \langle \omega(A)E(I_n)f, g\rangle = \langle E(I_n)f, g^*\rangle = \langle f, E(I_n)g^*\rangle \quad \forall f \in D \\
&\overset{\text{D dicht}}{\Longrightarrow} \quad \int_{-n}^{n} \omega^*(\lambda) dE(\lambda) g = E(I_n)g^* \\
&\Longrightarrow \quad \int_{-n}^{n} |\omega(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)g\|^2 = \left\| \int_{-n}^{n} \omega^*(\lambda) dE(\lambda) g \right\|^2 = \|E(I_n)g^*\|^2 \leq \|g^*\|^2 \leq \infty \\
&\Longrightarrow \quad g \in D
\end{aligned}
$$

Also $\omega^*(A) = \omega(A)^*$.

(iv) Da $D(\omega^*(A))$ dicht $\exists\ [\omega^*(A)]^* \overset{\text{(i)-(iii)}}{=} \omega^{**}(A) = \omega(A)$.

$\square$

12. Einparametrige unitäre Gruppen

Sei im folgenden stets H Hilbertraum.

DEFINITION 12.1
Eine Abb. $B : \mathbb{R} \to B(H)$ *heißt* ***einparametrige Gruppe****, wenn gilt:*

a) $B(0) = I$

b) $B(s)B(t) = B(s+t) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$

BEMERKUNG.
$(\{B(t) : \ t \in \mathbb{R}\}, 0)$ ist abelsche Gruppe:

- Assoziativität:

  $$B(r) \circ (B(s) \circ B(t)) = B(r) \circ B(s+t) = B(r+s+t) = B(r+s) \circ B(t) = (B(r) \circ B(s)) \circ B(t)$$

- Kommutativität: klar
- Neutrales Element: $B(0) = I \in \{B(t) : \ t \in \mathbb{R}\}$
- Inverses Element: $B(s)B(-s) = B(0) = I$

DEFINITION 12.2
Eine einparametrige Gruppe $B : \mathbb{R} \to B(t)$ *heißt* ***stark stetig****, wenn*

$$\forall f \in H, \ \forall t_0 \in \mathbb{R} : \ \lim_{t \to t_0} B(t)f = B(t_0)f$$

DEFINITION 12.3

Sei $B : \mathbb{R} \to B(H)$ einparametrige Gruppe.
Sei $D(A) := \left\{ f \in H : \exists \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{1}{t}(B(t) - B(0))f \right\}$ und $Af := \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{1}{t}(B(t) - I)f$ für $f \in D(A)$
*A heißt **infinitesimaler Generator** von $B : \mathbb{R} \to B(H)$*

DEFINITION 12.4

*Eine Abb. $B : \mathbb{R} \to B(H)$ heißt **unitär**, falls $B(t)$ unitär $\forall t \in \mathbb{R}$*

SATZ 12.5

Sei H komplexer Hilbertraum, $T : D(T) \to H$ selbstadjungiert mit Spektralschar $E : \mathbb{R} \to B(H)$
Sei $U(t)f := e^{itT} f := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} dE(\lambda)f, \ \forall t \in \mathbb{R}\, \forall f \in H$
Dann ist $U : \mathbb{R} \to B(H)$ stark stetige, einparametrige, unitäre Gruppe mit infinitesimalem Generator iT.
Für alle $f \in D(T)$ und $t \in \mathbb{R}$ ist weiter $U(t)f \in D(T)$

BEWEIS.

(i) Für $f \in H$ ist
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|e^{it\lambda}|^2}_{1} d\|E(\lambda)f\|^2 = \|f\|^2 < \infty$$
$\overset{11.3}{\Longrightarrow} D(U(t)) = H$
Nach 11.9 ist
$$U(t) \in B(H)$$
und nach 11.10
$$U(t)^* = U(-t) \quad (\text{da } e^{-it\lambda} = (e^{-it\lambda})^*)$$
Nach 11.7 gilt
$$U(t)^{-1} = U(-t)$$
$$\underset{\text{Funkana I}}{\Longrightarrow} \quad U(t)^* = U(t)^{-1}$$
$$\Longrightarrow \quad U(t) \text{ unitär } \forall t \in \mathbb{R}$$

(ii) Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist
$$e^{ix} - e^{iy} = e^{i\frac{x}{2}}e^{i\frac{x}{2}}e^{i\frac{y}{2}}e^{-i\frac{y}{2}} - e^{i\frac{y}{2}}e^{i\frac{y}{2}}e^{i\frac{x}{2}}e^{-i\frac{x}{2}} = e^{i\frac{x}{2}}e^{i\frac{y}{2}}(e^{i\frac{x}{2}}e^{-i\frac{y}{2}} - e^{i\frac{y}{2}}e^{-i\frac{x}{2}})$$

$$\Longrightarrow |e^{ix}-e^{iy}| = \underbrace{|e^{i\frac{x}{2}}||e^{i\frac{y}{2}}|}_{=1}|e^{i\frac{x-y}{2}}-e^{-i\frac{x-y}{2}}| = 2|\sin(\frac{x-y}{2})|$$

Für $f\in H,\ t_0,t\in\mathbb{R}$ ist daher

$$\begin{aligned}\|U(t)f-U(t_0)f\|^2 &= \left\|\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{it\lambda}-e^{it_0\lambda})dE(\lambda)f\right\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{it\lambda}-e^{it_0\lambda}\right|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 = \\ &= 4\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sin\frac{(t-t_0)\lambda}{2}\right|^2 d\|E(\lambda)f\|^2\end{aligned}$$

Es ist

$$\left|\sin\left(\frac{(t-t_0)\lambda}{2}\right)\right|^2 \le 1 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\|E(\lambda)f\|^2 = \|f\|^2$$

Für jedes $\lambda\in\mathbb{R}$ ist

$$\sin\left(\frac{(t-t_0)\lambda}{2}\right)\to 0,\ (t\to t_0)$$

$$\begin{aligned}&\underset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sin\left(\frac{(t-t_0)\lambda}{2}\right)\right|^2 d\|E(\lambda)f\|^2\to 0,\ (t\to t_0)\\ &\Longrightarrow \quad U \text{ stark stetig}\end{aligned}$$

(iii) Für $\lambda\in\mathbb{R}$ ist

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}\frac{1}{t}\left(e^{it\lambda}-1\right) = \left(\frac{d}{dt}e^{it\lambda}\right)\Bigg|_{t=0} = i\lambda \tag{12.1}$$

Weiter

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1) &= \frac{1}{t}(\cos t\lambda-\cos 0)+\frac{i}{t}(\sin t\lambda-\sin 0) = \\ &\underset{\text{satz}}{\overset{\text{Mittelwert-}}{=}} -\sin(\tilde{t_1}\lambda)\lambda+i\lambda\cos(\tilde{t_2}\lambda),\ (0<|\tilde{t_1}|,\ |\tilde{t_2}|<|t|)\end{aligned}$$

$$\left|\frac{e^{it\lambda}-1}{t}\right|\le 2|\lambda|,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall t\neq 0 \tag{12.2}$$

a) Sei $f\in D(T)=\left\{f\in H:\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2<\infty\right\}$

Für $t\neq 0$ ist das

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{t}(U(t)-I)f-iTf\right\|^2 &= \left\|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\lambda t}-1}{t}dE(\lambda)f-i\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda dE(\lambda)f\right\|^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{e^{i\lambda t}-1}{t}-i\lambda\right|^2 d\|E(\lambda)f\|^2\end{aligned}$$

Nach (12.2) ist

$$\left|\frac{e^{i\lambda t}-1}{t}\right|^2 \leq 9|\lambda|^2 \quad \text{(integrierbare Majorante)}$$

Nach (12.1) ist

$$\frac{e^{i\lambda t}-1}{t} - i\lambda \to 0,\ (t \to 0)$$

$$\stackrel{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{e^{i\lambda t}-1}{t} - i\lambda\right|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 \to 0,\ (t \to 0)$$

Ist A der infinitesimale Generator zu U, so folgt $f \in D(A)$ und $Af = iTf$

b) Sei umgekehrt $f \in D(A)$, d.h. $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{1}{t}(U(t)-I)f$ existiert.

Nach 11.3 ist

$$\underbrace{\left\|\frac{1}{t}(U(t)-I)f\right\|^2}_{\text{konvergent, also beschränkt}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left|\frac{e^{-i\lambda t}-1}{t}\right|^2}_{\geq 0} d\|E(\lambda)f\|^2$$

Nach (12.2) ist

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \left|\frac{1}{t}(e^{-i\lambda t}-1)\right|^2 = |\lambda|^2 \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2 \leq \liminf \left\|\frac{1}{t}(U(t)-I)f\right\|^2 < \infty$$

$$\Longrightarrow f \in D(T),\ \text{also } A = iT$$

(iv) Ist $f \in D(T)$, so gilt (vgl. Bemerkung in 11):

$$E(\lambda)U(t)f = U(t)E(\lambda)f,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)U(t)f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|U(t)E(\lambda)f\|^2 =$$

$$\stackrel{U(t)\text{ unitär}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2 < \infty \quad (\text{da } f \in D(T))$$

$\Longrightarrow U(t)f \in D(T)$

□

SATZ 12.6 **Satz von Stone**

Sei H komplexer, separabler Hilbertraum.
Sei $U : \mathbb{R} \to B(H)$ stark stetige, einparametrige unitäre Gruppe.
Dann existiert genau ein selbstadjungierter Operator T in H mit

$$U(t) = e^{itT} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

BEMERKUNG.
Ist H separabel, so genügt anstelle der starken Stetigkeit die schwache Messbarkeit, d.h. die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \varphi(t) = \langle f, U(t)g \rangle$$

ist $\forall f, g \in H$ messbar.

LEMMA 12.7

Sei $U : \mathbb{R} \to B(H)$ stark stetig. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $supp(\varphi) \subset [a, b]$.
Sei $Z : a = s_1 < ... < s_{k+1} = b$.
Für $f \in H$ sei $S_f(Z) := \sum_{i=1}^{k} \varphi(s_i)U(s_i)f(s_{i+1} - s_i)$
Ist $(Z^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}}$ Zerlegungsfolge von $[a, b]$ mit $\delta(Z^{(\nu)}) \to 0$, so konvergiert $S_f(Z^{(\nu)})$ in H. Der Grenzwert ist unabhängig von der gewählten Folge.
Setze

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(s)U(s)f ds := \int_a^b \varphi(s)U(s)f ds := \lim_{\nu \to \infty} S_f(Z^{(\nu)})$$

Weiter gilt

$$\left\| \int_a^b \varphi(s)U(s)f ds \right\| \leq \int_a^b |\varphi(s)| \|U(s)f\| ds$$

BEWEIS.
Es ist $U(\cdot)f : \mathbb{R} \to H$ stetig zwischen metrischen Räumen

$$\underset{\text{AnaII}}{\Longrightarrow} \quad U(\cdot)f \text{ in } [a, b] \text{ glm. stetig und beschränkt}$$
$$\Longrightarrow \quad \exists M > 0 : \ \|U(t)f\| \underset{B(H)}{\leq} M \quad \forall t \in [a, b]$$

$$|\varphi(t)| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, $\tilde{\varepsilon} := \dfrac{\varepsilon}{2M(b-a)\|f\|}$

$\Longrightarrow \exists \delta > 0: \ \forall t', t'' \in [a,b]$ mit $|t'-t''| \leq \delta$ gilt

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| + \|U(t')f - U(t'')f\| \underset{B(H)}{\leq} \tilde{\varepsilon}$$

Seien $Z_1 : a = s_1 < ... < s_{k+1} = b, \ Z_2 : t_1 < ... < t_{m+1} = b$ Zerlegungen mit Feinheit $\leq \delta$
Sei $Z_3 : a = u_1 < ... < u_{n+1} = b$ gemeinsame Verfeinerung:

$$|S_f(Z_1) - S_f(Z_3)| = \left| \sum_{i=1}^{k} \sum_{\{j: u_j \in [s_i, s_{i+1}[\}} (\varphi(u_j)U(u_j)f - \varphi(s_i)U(s_i)f)(u_{j+1} - u_j) \right| \leq$$

$$\overset{\triangle-Ungl.}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \sum_{\{...\}} \underbrace{(|\varphi(u_j)| \|(U(u_j) - U(s_i))f\| + |\varphi(u_j) - \varphi(s_i)| \|U(s_i)f\|)}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}} (u_{j+1} - u_j) \leq$$

$$\underset{\text{summe}}{\overset{\text{Teleskop-}}{\leq}} \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

Analog: $|S_f(Z_2) - S_f(Z_3)| \leq \varepsilon$
$\Longrightarrow$ Beh. $\square$

BEMERKUNG.
Ist $supp(\varphi) \subset [c,d]$

$$\Longrightarrow \int_a^b \varphi(s)U(s)f ds = \int_c^d \varphi(s)U(s)f ds$$

LEMMA 12.8
Sei $U : \mathbb{R} \to B(H)$ *stark stetige einparametrige Gruppe,* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$*.*
Dann gilt für $t \in \mathbb{R}$ *:*

$$U(t) \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)U(s)f ds = \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)U(t)U(s)f ds = \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)U(t+s)f ds$$

BEWEIS.
Sei $f_\varphi := \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)U(s)f ds$
Sei $(Z^{(\nu)})$ mit $\delta(Z^{(\nu)}) \to 0$

$$\Longrightarrow \quad S_f(Z^{(\nu)}) \to f_\varphi$$
$$\overset{U(t)\in B(H)}{\Longrightarrow} \quad U(t)S_f(Z^{(\nu)}) \to U(t)f_\varphi$$

Andererseits:

$$U(t)S_f(Z^{(\nu)}) = U(t)\sum_{i=1}^{k^{(\nu)}} \varphi(s_i^{(\nu)})U(s_i^{(\nu)})f(s_{i+1}^{(\nu)} - s_i^{(\nu)}) = \sum_{i=1}^{k^{(\nu)}} \varphi(s_i^{(\nu)})U(t+s_i^{(\nu)})f(s_{i+1}^{(\nu)} - s_i^{(\nu)})$$

Mit $V(s) := U(t+s)$ sind die Vorr. von Lemma 12.7 erfüllt

$$\Longrightarrow U(t)S_f(Z^{(\nu)}) \to \int\limits_a^b \varphi(s)U(t+s)f\,ds$$

□

LEMMA 12.9

Sei $U : \mathbb{R} \to B(H)$ stark stetige, unitäre einparametrige Gruppe.
Dann besitzt U einen dicht definierten infinitesimalen Generator A.

BEWEIS.

(i) Sei für $f \in H,\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ f_\varphi := \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(s)U(s)f\,ds$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \frac{1}{t}(U(t)-I)f_\varphi \quad &= \quad \frac{1}{t}U(t)f_\varphi - \frac{1}{t}f_\varphi \overset{12.8}{=} \frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(s)U(t+s)f\,ds - \frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(s)U(s)f\,ds = \\
&\overset{\text{nach-}}{\underset{\text{rechnen}}{=}} \frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(s-t)U(s)f\,ds - \frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(s)U(s)f\,ds = \\
&\overset{\text{nach-}}{\underset{\text{rechnen}}{=}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{t}(\varphi(s-t)-\varphi(s))U(s)f\,ds \underset{(t\to 0)}{\to} -\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi'(s)U(s)f\,ds
\end{aligned}$$

denn:

$$\begin{aligned}
&\left\| \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t}\left[\varphi(s-t)-\varphi(s)\right] + \varphi'(s) \right) U(s)f\,ds \right\| \leq \\
&\overset{12.7}{\leq} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{t}\left[\varphi(s-t)-\varphi(s)\right] + \varphi'(s) \right| \underbrace{\|U(s)f\|}_{=\|f\|} ds \underset{(t\to 0)}{\to} 0
\end{aligned}$$

Also:

$$D_0 := \{f_\varphi :\ f \in H,\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\} \subset D(A)$$

(ii) Sei $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ j \geq 0,\ j(t) = 0$ für $|t| \geq 1,\ \int\limits_{\mathbb{R}} j(t)dt = 1$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $j_n(t) := nj(nt)$

$$\Longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} j_n(t)dt = 1$$

Sei $f \in H$ gegeben:

Setze $f_n := \int\limits_{\mathbb{R}} j_n(s)U(s)fds \overset{(i)}{\Longrightarrow} f_n \in D_0$

$$\int j_n(s)Ifds \overset{\text{Def}}{=} \left(\int j_n(s)ds\right) f = f$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \|f_n - f\| &= \left\|\int\limits_{\mathbb{R}} j_n(s)(U(s)-I)fds\right\| \overset{12.7}{\leq} \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{j_n(s)}_{\geq 0} \|(U(s)-I)f\|ds \leq \\
&\leq \sup\left\{\|(U(s)-I)f\| :\ |s| \leq \frac{1}{n}\right\} \cdot \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} j_n(s)ds}_{=1} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

d.h. D_0 dicht in H

□

BEWEIS VON 12.6 .

(i) Falls ein selbstadjungiertes T gefunden ist mit

$$U(t) = e^{itT}$$

so folgt aus 12.5, dass iT der (eindeutig bestimmte) infinitesimale Generator ist

(ii) Nach 12.9 besitzt U einen dicht definierten infinitesimalen Generator A, setze

$$T := iA$$

Zeige: T wesentlich selbstadjungiert mit $U(t) = e^{it\overline{T}}$

Dann ist nach 12.5 $\overline{T}$ infinitesimaler Generator von U
Andererseits ist dieser auch

$$A = i(-iA) = iT$$

$$\Longrightarrow T = \overline{T} \quad \textit{und} \quad U(t) = e^{itT}$$

(iii) Zeige: $T = -iA$ *hermitesch*

Seien $f, g \in D(T) = D(A)$

$$\begin{aligned}\langle g, Tf\rangle &= \langle g, -iAf\rangle = -i\langle g, Af\rangle = -i\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}\langle g, t^{-1}(U(t)-I)f\rangle = \\ &\overset{U\text{ unitär}}{=} -i\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\langle U(-t)g, f\rangle - \langle g, f\rangle\right] = i\lim_{t\to 0}\langle \frac{1}{-t}(U(-t)-I)g, f\rangle = \\ &= i\langle Ag, f\rangle = \langle -iAg, f\rangle = \langle Tg, f\rangle\end{aligned}$$

(iv) Zeige: $\overline{R(T+i)} = \overline{R(T-i)} = H$

Sei $g \perp R(T-i)$ *(Zeige:* $g = 0$*)*

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \langle g, Tf - if\rangle = 0 \quad \forall f \in D(T)\\ &\Leftrightarrow \langle g, Tf\rangle = \langle g, if\rangle = -\langle ig, f\rangle\\ &\Leftrightarrow \langle -g, f\rangle = \langle g, iTf\rangle\end{aligned} \tag{12.3}$$

Sei $f \in H,\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$
Sei $f_\varphi \in D_0$ *wie in 12.9*

$$\Longrightarrow U(t)f_\varphi \overset{12.8}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)U(t+s)f ds = \int_{\mathbb{R}} \varphi(s-t)U(s)f ds \in D_0 \subset D(A)$$

weiter:

$$h^{-1}(\underbrace{U(t+h)}_{U(t)U(h)} f_\varphi - U(t)f_\varphi) = h^{-1}(U(h)-I)\underbrace{U(t)f_\varphi}_{\in D(A)} \underset{(h\to 0)}{\rightarrow} AU(t)f_\varphi \tag{12.4}$$

$$\Longrightarrow \exists \frac{d}{dt}U(t)f_\varphi = AU(t)f_\varphi$$

Sei $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \Psi(t) := \langle g, U(t)f_\varphi\rangle$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \quad \Psi \text{ differenzierbar,}\\ &\qquad\quad \Psi'(t) = \langle g, AU(t)f_\varphi\rangle = \langle g, iTU(t)f_\varphi\rangle \overset{(12.3)}{=} \langle -g, U(t)f_\varphi\rangle = -\Psi(t)\\ &\underset{\text{Lindelöf}}{\overset{\text{Picard-}}{\Longrightarrow}} \quad \Psi(t) = \Psi(0)e^{-t}\end{aligned}$$

Da $|\Psi(t)| \leq \|g\|\|U(t)f_\varphi\| = \|g\|\|f_\varphi\| \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \Psi(0) = 0\\ &\Longrightarrow \langle g, f_\varphi\rangle = 0 \quad \forall f_\varphi \in D_0 \text{ dicht in } H\\ &\Longrightarrow g = 0\\ &\Longrightarrow \overline{R(T-i)} = H\end{aligned}$$

analog: $\overline{R(T+i)} = H$

$\overset{2.13}{\Longrightarrow} T$ *wesentlich selbstadjungiert* *(v) Zeige:* $U(t) = e^{it\overline{T}} =: V(t)$

Sei $f \in D_0 \subset D(A) = D(T) \subset D(\overline{T})$

$$\overset{12.5}{\Longrightarrow} \frac{d}{dt} V(t)f = i\overline{T}V(t)f \quad \textit{(analog (12.4))}$$

Nach (12.4) ist

$$\frac{d}{dt} U(t)f = iTU(t)f \quad (\textit{da } f \in D_0 \subset D(A))$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}(U(t)f - V(t)f) = iTU(t)f - i\overline{T}V(t)f = i\overline{T}U(t)f - i\overline{T}V(t)f = i\overline{T}\underbrace{(U(t)f - V(t)f)}_{=:W(t)}$$

$$\begin{aligned} &h^{-1}(\|W(t+h)\|^2 - \|W(t)\|^2) = \\ &= \quad h^{-1}(\langle W(t+h), W(t+h)\rangle - \langle W(t+h), W(t)\rangle + \langle W(t+h), W(t)\rangle - \langle W(t), W(t)\rangle) = \\ &= \quad \langle W(t+h), h^{-1}(W(t+h) - W(t))\rangle + \langle h^{-1}(W(t+h) - W(t)), W(t)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \exists \frac{d}{dt}\|W(t)\|^2 \quad &= \quad \langle W(t), W'(t)\rangle + \langle W'(t), W(t)\rangle = 2\Re\langle W(t), W'(t)\rangle = \\ &= \quad 2\Re\langle W(t), i\overline{T}W(t)\rangle = 2\Re i \underbrace{\langle W(t), \overline{T}W(t)\rangle}_{\in\mathbb{R}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \|W(t)\| = \|W(0)\| = \|U(0)f - V(0)f\| = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow \quad U(t)f = V(t)f \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall f \in D_0 \ \textit{ dicht in } H \\ &\Longrightarrow \quad U(t) = V(t) \end{aligned}$$

□

SATZ 12.10

Sei H *komplexer, separabler Hilbertraum,* $T : D(T) \to H$ *selbstadjungiert,* $U(t) := e^{itT}$. *Sei* $f \in D(T)$. *Dann ist*

$$\textit{(AWP)} \qquad \frac{1}{i}\frac{d}{dt}u(t) = Tu(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},\ u(0) = f,\ u : \mathbb{R} \to D(T) \textit{ stetig differenzierbar}$$

eindeutig lösbar durch

$$u(t) := U(t)f$$

BEWEIS.

(i) Nach 12.5 ist $u(t) = U(t)f$ Lösung

(ii) Seien u, v zwei Lösungen von (AWP)
Analog zu 12.6(v) ist

$$\frac{d}{dt}\|u(t)-v(t)\|^2 = 2\Re\left\langle u(t)-v(t), \frac{d}{dt}(u(t)-v(t))\right\rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \|u(t)-v(t)\|^2 = \|u(0)-v(0)\|^2 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

□

BEISPIEL 12.11
$H = L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}),\ \mathbb{K} = \mathbb{C},\ D(T) = H_0^{2,2}(\mathbb{R}^n),\ T_u := -\triangle u$ für $u \in D(T)$
$\Rightarrow T$ selbstadjungiert.

Gegeben: $f \in H_0^{2,2}(\mathbb{R}^n)$.

Gesucht: $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit $u(\cdot, x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$u(t,\cdot), \frac{d}{dt}u(t,\cdot) \in H_0^{2,2}(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}u(t,x) + (\triangle xu)(t,x) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

und

$$u(0,x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Nach 12.10

$$\exists\ \tilde{u} : \mathbb{R} \to H_0^{2,2}(\mathbb{R}^n),\ \tilde{u}(0) = f,\ \frac{d}{dt}\tilde{u}(t) = iT\tilde{u}(t)$$

d.h.

$$\tilde{u}(t) = u(t,\cdot),\ u(0,\cdot) = f \text{ fast überall,}$$
$$u(t,\cdot) = \tilde{u}(t) \in H_0^{2,2}(\mathbb{R}^n)$$

$$h^{-1}(u(t+h,\cdot) - u(t,\cdot)) \to iTu(t,\cdot) \ \text{ in } \ L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$$

$$\overset{Fischer-}{\underset{Riesz}{\Longrightarrow}} h^{-1}(u(t+h,x) - u(t,x)) \to iTu(t,x) \ \text{ fast überall in } \ \mathbb{R}^n \ \text{ für festes } \ t \in \mathbb{R}$$

◇

Index

A-beschränkt, 121
A-kompakt, 121
A-kompakt , 120
abelsche Gruppe, 135
abgeschlossen, 1, 6, 8, 10, 14, 15, 18, 20, 132
abgeschlossener Unterraum, 14
abschließbar, 1, 6, 8, 10, 15, 17, 20
Abschließung, 3
adjungierter Operator, 9
Auswahlsatz, 76

beachränkte Variation, 66
beschränkt, 8, 15, 19, 20, 22, 23, 35, 41, 116, 118
beschränkte Variation, 53–55, 61, 64, 65, 75–77

dicht, 9–11, 13–15, 17–19, 81, 96, 124
dichter Untervektorraum, 123
diskretes Spektrum, 112

Eigenvektor, 109
Eigenwert, 107, 109, 112
einparametrige Gruppe, 135, 136, 139–141

Graph, 5, 6
Grenzwert, 139

Häufungspunkt, 114
halbbeschränkt, 46
hermitesch, 17–23, 26, 35, 46, 81, 109, 116, 118, 120, 121
Hilbertraum, 4, 11, 35, 40, 46
holomorph, 31, 66, 73

Infimum, 53
infinitesimaler Generator, 136, 141
injektiv, 13, 22, 23
isometrische Monomorphismen, 4

kompakt, 109, 118
kompakte Intervalle, 59
kompaktes Intervall, 104, 110
komplexer Hilbertraum, 136, 139, 144
Konvergenzsatz, 77

Lebesgue-messbar, 41
linear, 8–11, 13–15, 17–19, 28
lineare Operatoren, 125
linearer Operator, 5, 6, 20

messbar, 139
monoton, 53, 54, 61, 73

Neumannsche Reihe, 30

obere Schranke, 53
ONS, 26
Operator, 123
Operatoren, 120, 121
Orthonormalsystem, 109

Projektor, 49, 50, 105

Rellich-Kato, 35
Resolvente, 28
Resolventengleichung, 29

Schranke, 35
selbstadjungiert, 18–22, 27, 29–33, 35, 81, 84, 85, 88, 92, 96, 99, 103, 104, 107, 109–112, 114–116, 121, 123, 136, 144
selbstadjungierter Operator, 139
selbstadjungiet, 19
separabel, 139
separabler Hilbertraum, 92, 139, 144
seperabler komplexer Hilbertraum, 99
singuläre Folge, 111
Skalarprodukt, 40
Sobolevraum, 40
Spektralraum, 103
Spektralsatz, 99

Spektralschar, 49–52, 54–57, 59, 88, 92, 95, 96, 103, 105, 107, 112, 115, 116, 136
Spektrum, 27
stark stetig, 135, 136, 139–141
stetig, 32, 64, 75, 77, 123, 124, 126, 130–132
stetig differenzierbar, 144
Stieltjes-Umkehrformel, 66
Stone, 81

Teilfolge, 76, 79
Totalvariation, 53

unitär, 12, 139, 141
unitr, 136
Untervektorraum, 12, 84

wesentlich selbstadjungiert, 19, 20, 22, 23, 26
wesentliches Spektrum, 110
Weyl, 111
wohldefiniert, 9