Schnittbasierte Ungleichungen für Netzwerkdimensionierungsprobleme

Christian Raack

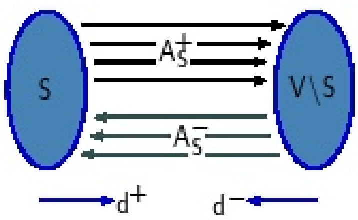
Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (ZIB),
Division Scientific Computing, Takustr. 7, 14195 Berlin-Dahlem
raack@zib.de

Wir betrachten das folgende (abstrahierte) Netzwerkdimensionierungsproblem. Gegeben sei ein Graph $G = (V, A)$, welcher z.B. die potentielle Topologie eines IP-Backbone-Netzes repräsentieren kann. Zusätzlich existieren eine Menge D von (Kommunikations-)Bedarfen. Ein Bedarf besteht aus Quell- und Zielknoten $s, t \in V$ sowie der eigentlichen Anforderung $d^{st} > 0$ (z.B in Mbps). Unsere Aufgabe ist es die Netzverbindungen $a \in A$ so zu dimensionieren, dass ein zulässiger Fluss aller Bedarfe durch das Netz G möglich ist. Dabei darf der Fluss auf einem Link dessen Kapazität nicht übersteigen. Kapazität kann üblicherweise nicht kontinuierlich installiert werden, sondern steht in Form von Modulen verschiedener Größe zur Verfügung (z.B Bandbreiten 2.5, 10, 40 Gbps). Jedes Modul $m \in M$ mit Kapazität c^m darf ganzzahlig oft auf jedem Link aus A installiert werden und erzeugt dort Kosten k^m. Gesucht ist nun eine zulässige und kostenminimale Kombination (f, x) aus Fluss f und Netzwerkdesign x.

Sei P die konvexe Hülle aller Lösungen (f, x), also $P = \text{conv}\{(f, x) : (f, x) \text{ ist zulässig}\}$. Dann lässt sich unser Problem als

$$\begin{aligned} \min\ & l^T f + k^T x \\ & (f, x) \in P \end{aligned}$$

schreiben. Zur Lösung solcher $\mathcal{NP}$-schweren Optimierungsprobleme werden erfolgreich Branch & Bound und Schnittebenenverfahren kombiniert (Branch & Cut). Für die Leistungsfähigkeit dieser Algorithmen ist es hilfreich, möglichst genaue Kenntnisse über die Struktur der Seitenflächen von P zu haben. Wir betrachten hier insbesondere solche Seitenflächen, die von Ungleichungen definiert sind, deren Support auf einem Schnitt des Graphen liegt.



Sei $S \subset V$ eine nichtleere echte Knotenteilmenge und $A_S = A_S^+ \cup A_S^-$ der zugehörige Schnitt und sei $D_S \subseteq D$ die Menge der Bedarfe, deren Endknoten nicht gleichzeitig in S oder $V \backslash S$ liegen. Der Graph $G_S = (\{S, V \backslash S\}, A_S)$ zusammen mit den Bedarfen D_S definiert ein 2-Knoten-Netzwerkdimensionierungsproblem. In diesem relaxierten Problem werden die Flüsse und Kapazitäten in den Subgraphen $G[S]$ und $G[V \setminus S]$ vernachlässigt und es wird nur die Dimensionierung des Schnittes A_S betrachtet. Das zugehörige Polyeder P_S wird als *cutset-polyhedron* (Schnittpolyeder) bezeichnet. Trivialerweise ist jede für P_S gültige Ungleichung auch für P gültig. Nun stellt sich die Frage welcher Zusammenhang besteht zwischen der Seitenflächenstruktur von P und der von P_S. Wir können zeigen, dass jede facetten-definierende Ungleichung von P_S auch eine Facette von P definiert (Variablen nicht auf dem Schnitt bekommen Koeffizienten Null), wenn sowohl $G[S]$ als auch $G[V \setminus S]$ stark zusammenhängend sind (im ungerichteten Fall reicht zusammenhängend) [1]. Das motiviert die genaue Analyse von P_S. Wir betrachten konkrete Klassen facetten-definierender Ungleichungen von P_S, so-genannte *cutset-inequalities* und *flow-cutset-inequalities*, studieren strukturelle Unterschiede gerichteter und ungerichteter Modelle und zeigen wie diese Ungleichungen in der Praxis effizient separiert und eingesetzt werden. Selbst moderne Branch & Cut- Löser können beim Einsatz solcher problemspezifischer Schnittebenen um ein Vielfaches beschleunigt werden [2].

Literatur

[1] C. Raack, A. M. C. A. Koster, S. Orlowski, and R. Wessäly. On the strength of cut-based inequalities for capacitated network design polyhedra. ZIB-Report 07-08, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 2007.

[2] C. Raack, A. M. C. A. Koster, S. Orlowski, and R. Wessäly. Capacitated network design using general flow-cutset inequalities. ZIB-Report 07-14, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 2007.